

תרגיל 11

1. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהי X מרחב טופולוגי דיסקרטי עם בסיס B . הוכיחו שלכל $x \in X$, $\{x\} \in B$.

פתרון:

כזכורת אם B בסיס לטופולוגיה ו- O קבוצה פתוחה $x \in O$, אז יש $V \in B$ כך ש- $x \in V \subseteq O$. נקח $O = \{x\}$. אז חייב להתקיים ש- $V = \{x\}$.

(ב) יהי X מרחב טופולוגי דיסקטי. תהא $f : X \rightarrow Y$ פונקציה על. הוכיחו כי טופולוגית המנה על Y היא הדיסקטית.

פתרון:

תהא $O \subseteq Y$ אזי $f^{-1}(O)$ פתוחה ב- X (כל קבוצה פתוחה ב- X) ולכן O פתוחה ב- Y .

(ג) יהי X מרחב טופולוגי עם בסיס B , Y קבוצה, ו- $f : X \rightarrow Y$ פונקציה על. הוכיחו/הפריכו: $B' = \{O \subseteq Y : f^{-1}(O) \in B\}$ הוא בסיס לטופולוגיית המנה על Y .

פתרון: הפרכה:

נגדיר $X = \{1, 2, 3\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית. לכן $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ הוא בסיס. נגדיר $Y = \{a, b\}$ (עבור $a \neq b$) ע"י $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$. זוהי פונקציה על ולכן טופולוגית המנה היא הדיסקטית. אבל

$$B' = \{O \subseteq Y : f^{-1}(O) \in B\} = \{\{b\}\}$$

שאינו מכיל את הנקודון $\{a\}$ ולכן B' לא יכול להיות בסיס לטופולוגיה הדיסקרטית.

(ד) יהי \mathbb{R}_l הישר של סורגנפריי, ו- $f : \mathbb{R}_l \rightarrow \mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם (שהיא על). מהי טופולוגיית המנה של \mathbb{Z} ביחס ל- f ?

פתרון:

הטופולוגיה היא הדיסקרטית. לצורך כך מספיק להראו שכל הנקודונים פתוחים. יהי $x \in \mathbb{Z}$. $f^{-1}\{x\} = [x, x+1)$ פתוח בישר של סורגנפריי.

2. נתבונן ב- \mathbb{R} עם הטופולוגיה הסטנדרטית, וב- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם התחתון $f(x) = [x]$. נסמן ב- τ את טופולוגיית המנה על \mathbb{Z} ביחס ל- f .

(א) הוכיחו שמתקיים: $O \in \tau \iff [\forall n \in \mathbb{Z} : (n \in O \Rightarrow n-1 \in O)]$

פתרון:

(\Leftarrow) תהי $O \in \tau$ ו- $n \in O$ צ"ל $n-1 \in O$. אכן, מהגדרת טופולוגית המנה נקבל כי $n \in f^{-1}(O)$ פתוח ב- \mathbb{R} לכן קיימת סביבה פתוחה $(n-\epsilon, n+\epsilon)$ מוכלת ב-

$x \in (n - \epsilon, n + \epsilon) \subseteq f^{-1}(O)$ עבור $\epsilon < 1$. בפרט קיים $x < n$ כך ש $f(x) = \lfloor x \rfloor = n - 1 \in O$.
 מה שאומר כי $f^{-1}(O) \subseteq \{x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor = n - 1\} = [n - 1, n)$.
 (⇒) תהי O שמקיימת את התנאי $[\forall n \in \mathbb{Z} : (n \in O \Rightarrow n - 1 \in O)]$. צ"ל ש $f^{-1}(O)$ פתוח ב \mathbb{R} . יהי $x \in f^{-1}(O)$. אם $x \notin \mathbb{Z}$, אז יש $n \in \mathbb{Z}$ כך ש $n - 1 < x < n$.
 לכן $f(x) = \lfloor x \rfloor = n - 1$. כמו כן, $f(n - 1) = n - 1$. כלומר יש סביבה פתוחה של x שמוכלת ב $f^{-1}(O)$.

כעת, אם $x = n \in \mathbb{Z}$, אז $f(n) = n \in O$. לכן מהתנאי, $n - 1 \in O$. נקבל ש $f^{-1}(O) \subseteq \{x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor = n - 1\} \cup \{n\} = [n - 1, n + \frac{1}{2})$.
 התחתון שלו הוא $n - 1$ או n . בכל מקרה, קיבלנו שלכל $x \in f^{-1}(O)$ יש סביבה פתוחה שמוכלת ב $f^{-1}(O)$ ולכן $f^{-1}(O)$ פתוחה ב \mathbb{R} , כלומר, O פתוחה בטופולוגיית המנה.

$$\tau = \{\mathbb{Z}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, M] \cap \mathbb{Z}\}_{M \in \mathbb{Z}}$$

פתרון:

ברור שכל הקבוצות בסעיף ב' עונות על התנאי מסעיף א' ולכן פתוחות. מצד שני, תהי O שעונה על התנאי מסעיף א'. אם $O = \emptyset$, סיימנו. אחרת, יש $x \in O$. אם קבוצת האיברים O אינה חסומה, אז לכל $m \in \mathbb{Z}$ יש $m < n$ כך ש $n \in O$. לפי התנאי, זה אומר ש $m \in O$. נקבל ש $O = \mathbb{Z}$. אחרת, נקח את האיבר המקסימלי ב O . נסמנו ב M . (נשים לב שלכל קבוצה חסומה ב \mathbb{Z} יש מקסימום). אז לפי התנאי ברור ש $(-\infty, M] \cap \mathbb{Z} \subseteq O$. מצד שני, לכל $n \geq M$, $n \notin O$, כי M הוא המקסימום. לכן, $O = (-\infty, M] \cap \mathbb{Z}$. כלומר, $\tau = \{\mathbb{Z}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, M] \cap \mathbb{Z}, M \in \mathbb{Z}\}$.

3. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהיו X, Y מרחבים מטריים, ו $f : X \rightarrow Y$ ו $g : Y \rightarrow X$ פונקציות רציפות, כך ש $f \circ g = id_Y$. הוכיחו כי f העתקת מנה.

פתרון:

ראשית, מכך ש $f \circ g = id_Y$ נובע ש f נובע ש f על. מכיוון ש f רציפה, אם $O \subseteq Y$ פתוחה, אז $f^{-1}(O)$ פתוחה. כעת נראה את הכיוון השני. תהי $O \subseteq Y$ פתוחה, אז $f^{-1}(O)$ פתוחה. g רציפה ולכן $g^{-1}(f^{-1}(O)) \subseteq Y$ פתוחה. אבל $g^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ g)^{-1}(O) = id_Y^{-1}(O) = O$. כלומר, O פתוחה.

(ב) תהי $f : X \rightarrow Y$ העתקת מנה. הוכיחו ש f הומיאומורפיזם $\iff f$ חח"ע.

פתרון:

(⇐) אם f הומיאומורפיזם, אז בפרט f חח"ע.

(⇒) אם f חח"ע ומנה אז נקבל ש f חח"ע ועל ורציף. נוכיח ש f פתוח. יהי $O \subseteq X$ פתוח. מכיוון ש f חח"ע ועל, $O = f^{-1}(f(O))$. לכן, מהגדרת העתקת מנה, $f(O)$ פתוח. מש"ל.

4.

(א) נגדיר יחס שקילות על \mathbb{R}^2 ע"י: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$. הוכיחו ש $\mathbb{R}^2 / \sim \cong \mathbb{R}$. רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל $f : \mathbb{R}^2 / \sim \rightarrow \mathbb{R}$.

פתרון:

נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $f(x, y) = x + y^2$. רציפה כפולינום. מקיימת $(x, y) \sim (x', y')$ אמ"מ התמונות תחת f שוות, וכן f על, כי למשל מקור של r הוא $(r, 0)$. לכן קיימת $\hat{f} : \mathbb{R}^2 / \sim \rightarrow \mathbb{R}$ והיא חח"ע, על ורציפה. נוכיח שההופכית רציפה. נגדיר את ההופכית כך $g(r) = [(r, 0)]$. זה בעצם הרכבה של שתי פונקציות: $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $g'(r) = (r, 0)$, ופונקציית המנה ששולחת כל איבר למחלקת השקילות שלו. g' רציפה כי היא רציפה רכיב-רכיב (פונקציית הזהות ופונקציה קבועה), ופונקציית המנה רציפה מההגדרה של טופולוגיית המנה. כלומר, g היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה. קל לראות ש g ו \hat{f} הופכיות אחת לשניה.

(ב) נגדיר יחס שקילות על \mathbb{R}^2 : $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ $\iff (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$.
למה הומיאומורפי \mathbb{R}^2 / \sim ?

פתרון:

$$\mathbb{R}^2 / \sim \cong [0, \infty)$$

הוכחה: נגדיר את הפונקציה הבאה: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ ע"י $f(x, y) = x^2 + y^2$. רציפה כפולינום ומקיימת $(x, y) \sim (x', y')$ אמ"מ התמונות תחת f שוות. כמו כן f על, כי המקור של $r \geq 0$ הוא $(\sqrt{r}, 0)$. לכן יש $\hat{f} : \mathbb{R}^2 / \sim \rightarrow [0, \infty)$ מוגדרת, רציפה, חח"ע ועל. נמצא את ההופכית. נסתכל על $g(r) = [(\sqrt{r}, 0)]$. קל לראות שהיא אכן ההופכית של \hat{f} . כמו בסעיף א, g היא הרכבה של פונקציות $g' : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $g'(r) = (\sqrt{r}, 0)$, ופונקציית המנה $\mathbb{R}^2 / \sim \rightarrow \mathbb{R}$. g' רציפה רכיב-רכיב ולכן רציפה. קיבלנו ש g היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

5. יהי X מרחב המנה של \mathbb{R} המתקבל ע"י זיהוי כל הנקודות מנורמה גדולה שווה מ1. כלומר $x \sim x'$ אמ"מ $x = x'$, או ש $|x| \geq 1 \wedge |x'| \geq 1$. הוכיחו ש $X \cong S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

פתרון:

נגדיר $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ע"י

$$f(x) = \begin{cases} (-1, 0) & |x| \geq 1 \\ (\cos(\pi x), \sin(\pi x)) & |x| < 1 \end{cases}$$

כלומר הנקודות מנורמה גדול שווה מ1 מועתקים ל $(-1, 0)$ וכל הנקודות בקטע $(-1, 1)$ מועתקות למעגל בלי הנקודה $(1, 0)$. הפונקציה f היא על ורציפה (כי היא רציפה בקבוצה הסגורה $[1, \infty) \cup (-\infty, -1]$ ורציפה בקבוצה הסגורה $[-1, 1]$ ומסכימה על החיתוך) ובנוסף מתקיים כי $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$ לכן $\hat{f} : X \rightarrow S^1$ מוגדרת, חח"ע, על ורציפה. בנוסף X קומפקטי כי הוא התמונה הרציפה של ρ מצומצת על $[-1, 1]$ שקומפקטי ו S^1 הוא T_2 ולכן \hat{f} סגורה ולכן הומו.

6. תנו דוגמא להעתקת מנה שהיא לא פתוחה ולא סגורה.

פתרון:

נחזור על הדוגמא מהתרגול. תהי $X = [0, 1]$ ו $Y = \{0, 1\}$ עם טופולוגיית שרפינסקי.

נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

בדקו שזוהי אכן פונקציית מנה. f לא פתוחה כי $f(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}) = \{1\}$, שהוא לא פתוח, ולא סגורה כי $f[0, \frac{1}{4}] = \{0\}$, שהוא לא סגור.