

## מתמטיקה בדידה – תרגיל 7 - פתרונות

1. לכל אחת מן הקבוצות הבאות של זוגות סדורים, קבעו אם היא פונקציה. לכל אלה שקבעתם כפונקציה, יש לקבוע את התחום והתמונה של הפונקציה (תמונת התחום שלה). מה אפשר לומר על טווח הפונקציה?

- א.  $\{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$
- ב.  $\{(1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$
- ג.  $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\}$
- ד.  $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + y = 5\}$
- ה.  $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y = 5\}$
- ו.  $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y < x + 2\}$
- ז.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < x + 2\}$
- ח.  $\{(x, y) \in \mathbb{Z}_5 \mid y = x^2\}$  (שלמים מודולו 5)<sup>1</sup>.

2. יהיו  $A, B$  קבוצות לא ריקות.

- א. הוכח כי קיימת פונקציה חח"ע  $g: A \rightarrow A \times B$ .
- ב. הוכח כי אם קיימת פונקציה חח"ע  $f: A \rightarrow B$  אזי קיימת פונקציה חח"ע  $h: A \times B \rightarrow B \times B$ .

3. ציינו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא חח"ע, על או הפיכה<sup>2</sup> (חח"ע ועל). הוכיחו את תשובותיכם.

- א.  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = |n|$
- ב.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$
- ג.  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$
- ד.  $A$  קבוצה כלשהי ו-  $f: P(A) \rightarrow P(A)$  הפונקציה המוגדרת ע"י  $f(B) = A \setminus B$ .
- ה. יהיו  $X, Y$  שתי קבוצות ותהי  $f: X \rightarrow Y$  פונקציה חח"ע. נגדיר פונקציה  $F: P(X) \rightarrow P(Y)$  ע"י  $F(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ ,  $\forall A \in P(X)$ .
- ו. כמו סעיף ה' אבל הפונקציה  $f: X \rightarrow Y$  גם על.

4. בשאלה זו הקבוצה  $U$  היא קבוצת המילים הסופיות (כולל המילה הריקה) מעל הא"ב<sup>3</sup>  $\{a, b, c, \dots, z\}$ . מגדירים פונקציה  $f: U \rightarrow U$  ע"י מחיקת כל אות שניה, לדוגמה:  $f(\text{and}) = \text{ad}$ .

$$f(\text{mathematics}) = \text{mteais}$$

- א. האם  $f$  היא על? אם לא, מצא דוגמה נגדית. אם כן, מצא  $g: U \rightarrow U$  כך ש-  $f \circ g$  היא פונקציה הזהות על  $U$ .
- ב. האם  $f$  היא חח"ע? אם לא, מצא דוגמה נגדית. אם כן, מצא  $g: U \rightarrow U$  כך ש-  $g \circ f$  היא פונקציה הזהות על  $U$ .

## בהצלחה!

<sup>1</sup> פעולות החיבור והכפל ב-  $\mathbb{Z}_5$  מוגדרים היטב. כלומר, אם  $a \equiv b \pmod{n}$  ו-  $c \equiv d \pmod{n}$  אז  $a + c \equiv b + d \pmod{n}$

$a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$

<sup>2</sup> שאלת רשות: אם הפונקציה הפיכה – מצאו את הפונקציה ההופכית. פונקציה  $g(x): Y \rightarrow X$  היא ההופכית של  $f(x): X \rightarrow Y$

אם מתקיים  $(\forall x \in X \ f \circ g(x) = x) \wedge (\forall y \in Y \ g(f(x)) = y)$

<sup>3</sup> מילה מעל א"ב היא מילה המורכבת רק מאותיות הא"ב.