

תרגיל בית 10 מבוא לחוגים ומודולים 88-212 סמסטר ב' תשע"ח

שאלה 1 (וידוא הגדרות). יהי R חוג ותהי $(M, +)$ חבורה אבלית. נניח שנתונה פעולה בינארית $\psi: R \times M \rightarrow M$ שנסמן אותה $\psi(r, m) = rm$ לאיברים $r \in R, m \in M$. נגדיר על החבורה האבלית $R \oplus M$ פעולת כפל לפי

$$(r + m)(r' + m') = rr' + rm'$$

הוכיחו שפעולת כפל זו הופכת את $R \oplus M$ לחוג אם ורק אם ψ הופכת את M למודול מעל R .

שאלה 2 (חימום). יהי R חוג. הוכיחו שהקבוצות הבאות הן תת-מודולים של R^n (שהוא מודול מעל R):

א. $\{(a, \dots, a) \in R^n \mid a \in R\}$.

ב. $\{(a_1, \dots, a_n) \in R^n \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$.

ג. $I_1 \times \dots \times I_n$ כאשר I_i הם אידיאלים של R .

שאלה 3. תזכורת: אם V מרחב וקטורי מעל שדה F וישנה העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$, אז ל- V יש מבנה של מודול מעל $F[x]$ על ידי הגדרת הכפל $f(x) \cdot v = f(T)(v)$. יהי $M = (\mathbb{R}^2, T)$ מודול מעל $\mathbb{R}[x]$ כאשר T היא ההטלה על ציר ה- y , כמו בתזכורת. הוכיחו כי תת-המודולים היחידים של M הם \mathbb{R}^2 , ציר ה- x , ציר ה- y ו- $\{(0, 0)\}$.

שאלה 4. הוכיחו כי \mathbb{Q} אינו חופשי כמודול מעל \mathbb{Z} .

שאלה 5. נראה כיוון הפוך לטענה שראינו בכיתה: יהי M מודול מעל חוג מנה R/I . הוכיחו כי M הוא מודול מעל R לפי הפעולה $rm := (r + I)m$. בנוסף הוכיחו $I \subseteq \text{Ann}_R(M)$.

שאלה 6. יהי R חוג חילופי, ויהי M מודול מעל R .

א. הוכיחו שאם M חופשי, אז $\text{Ann}_R(M) = \{0_R\}$ ו- $\text{Tor}(M) = \{0_M\}$.

ב. הוכיחו שאם כל אידיאל $I \triangleleft R$ הוא חופשי כמודול מעל R , אז R הוא תחום ראשי.

שאלה 7. יהי R חוג, ויהי $x \in R$. הוכיחו שיש איזומורפיזם של מודולים $R/x \cong R/\text{Ann}_R(x)$.

שאלה 8. יהי R חוג ויהיו אידיאלים שמאליים $L, L' \leq_l R$. בכיתה ראינו מסקנה לפיה אם R חילופי, אז $R/L \cong R/L'$ אם ורק אם $L = L'$. הפריכו את המסקנה אם R אינו חילופי. רמז: אפשר לבחור $R = M_2(\mathbb{Q})$, $L = Re_{11}$ ו- $L' = Re_{22}$.

שאלה 9 (העשרה). נסו להבין כמה שיותר מהדוגמאות בערך [הומומורפיזם של מודולים](#) בויקיפדיה, במיוחד לגבי חוגי אנדומורפיזמים.

בהצלחה!