

## תרגיל בית 10 מבוא לחוגים ומודולים 88-212 סמסטר ב' תשע"ח

**שאלה 1** (וידוא הגדרות). יהי  $R$  חוג ותהי  $(M, +)$  חבורה אבלית. נניח שנתונה פעולה בינארית  $\psi: R \times M \rightarrow M$  שנסמן אותה  $\psi(r, m) = rm$  לאיברים  $r \in R, m \in M$ . נגדיר על החבורה האבלית  $R \oplus M$  פעולת כפל לפי

$$(r + m)(r' + m') = rr' + rm' + r'm$$

הוכיחו שפעולת כפל זו הופכת את  $R \oplus M$  לחוג אם ורק אם  $\psi$  הופכת את  $M$  למודול מעל  $R$ .

**שאלה 2** (חימום). יהי  $R$  חוג. הוכיחו שהקבוצות הבאות הן תת-מודולים של  $R^n$  (שהוא מודול מעל  $R$ ):

א.  $\{(a, \dots, a) \in R^n \mid a \in R\}$ .

ב.  $\{(a_1, \dots, a_n) \in R^n \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$ .

ג.  $I_1 \times \dots \times I_n$  כאשר  $I_i$  הם אידיאלים של  $R$ .

**שאלה 3**. תזכורת: אם  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $F$  וישנה העתקה לינארית  $T: V \rightarrow V$ , אז ל- $V$  יש מבנה של מודול מעל  $F[x]$  על ידי הגדרת הכפל  $f(x) \cdot v = f(T)(v)$ . יהי  $M = (\mathbb{R}^2, T)$  מודול מעל  $\mathbb{R}[x]$  כאשר  $T$  היא ההטלה על ציר ה- $y$ , כמו בתזכורת. הוכיחו כי תת-המודולים היחידים של  $M$  הם  $\mathbb{R}^2$ , ציר ה- $x$ , ציר ה- $y$  ו- $\{(0, 0)\}$ .

**שאלה 4**. הוכיחו כי  $\mathbb{Q}$  אינו חופשי כמודול מעל  $\mathbb{Z}$ .

**שאלה 5**. נראה כיוון הפוך לטענה שראינו בכיתה: יהי  $M$  מודול מעל חוג מנה  $R/I$ . הוכיחו כי  $M$  הוא מודול מעל  $R$  לפי הפעולה  $rm := (r + I)m$ . בנוסף הוכיחו  $I \subseteq \text{Ann}_R(M)$ .

**שאלה 6**. יהי  $R$  חוג חילופי, ויהי  $M$  מודול מעל  $R$ .

א. הוכיחו שאם  $M$  חופשי, אז  $\text{Ann}_R(M) = \{0_R\}$  ו- $\text{Tor}(M) = \{0_M\}$ .

ב. הוכיחו שאם כל אידיאל  $I \triangleleft R$  הוא חופשי כמודול מעל  $R$ , אז  $R$  הוא תחום ראשי.

**שאלה 7**. יהי  $R$  חוג, ויהי  $x \in R$ . הוכיחו שיש איזומורפיזם של מודולים  $R/x \cong R/\text{Ann}_R(x)$ .

**שאלה 8**. יהי  $R$  חוג ויהיו אידיאלים שמאליים  $L, L' \leq_l R$ . בכיתה ראינו מסקנה לפיה אם  $R$  חילופי, אז  $R/L \cong R/L'$  אם ורק אם  $L = L'$ . הפריכו את המסקנה אם  $R$  אינו חילופי. רמז: אפשר לבחור  $R = M_2(\mathbb{Q})$ ,  $L = Re_{11}$ ,  $L' = Re_{22}$ .

**שאלה 9** (העשרה). נסו להבין כמה שיותר מהדוגמאות בערך הומומורפיזם של מודולים בויקיפדיה, במיוחד לגבי חוגי אנדומורפיזמים.

בהצלחה!