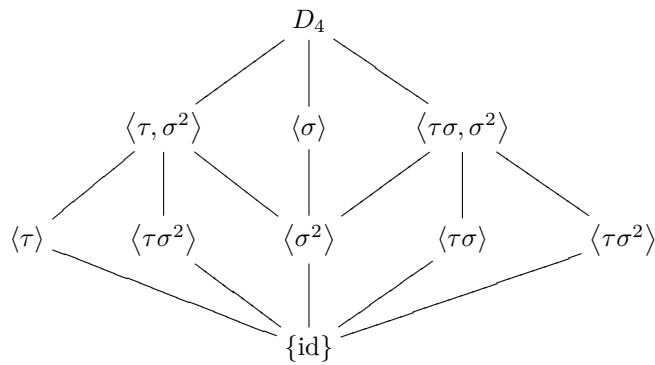


תרגיל בית 8 בתורת החבורות 88-218 סמסטר א' תשע"ט

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות קלות יותר בדרך כלל, אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. לפניכם סריג תת-החבורות של D_4 :



מצאו את סריג תת-חבורות של $D_4 / \langle \sigma^2 \rangle$ ואת כל המנות שלה בעזרת משפטי האיזומורפיזמים.

שאלה 2. תהי G חבורה ותהי $H \triangleleft G$. ראיתם במשפט האיזומורפיזם הרביעי (משפט ההתאמה) את הקשר בין תת-חבורות של G/H לבין תת-חבורות של G המכילות את H .

1. הוכיחו שאם $K_1, K_2 \in G$ תת-חבורות המכילות את H , אז

$$(K_1/H) \cap (K_2/H) = (K_1 \cap K_2)/H$$

2. מכך שאנו יודעים שתת-החבורה הגדולה ביותר של G שמוכלת ב- K_1 וב- K_2 היא

$$(K_1 \cap K_2)/H$$

שאלה 3. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$. הוכיחו שאם $N_1, N_2 \triangleleft G$ תת-חבורות נורמליות

$$N_1 \cap H = N_2 \cap H, \text{ אז } (HN_1)/N_1 \cong (HN_2)/N_2$$

שאלות רגילות

שאלה 4. תהי $N \triangleleft G$ תת־חבורה נורמלית סופית, $H \leq G$ תת־חבורה מאינדקס סופי ונניח $1 = ([G : H], |N|)$. הוכיחו כי $N \leq H$.

שאלה 5. תהי G חבורה סופית ותהינה $H, N \leq G$ תת־חבורות.

1. הפריכו ש- $HN \leq G$ היא תמיד תת־חבורה.

2. אם $H, N \triangleleft G$ נורמליות כך ש- $1 = ([G : H], [G : N])$, הוכיחו כי $G = HN$.
אתגר רשות: אפשר לוותר על הדרישה לנורמליות, והטענה תשאר נכונה!

תהי G חבורה, תהינה $H, K \triangleleft G$ תת־חבורות נורמליות, ונניח $H \subseteq K \subseteq G$, אז

$$(G/H) / (K/H) \cong G/K$$

בשאלה זו נוכיח את המשפט בעזרת משפט האיזומורפיזם הראשון לפי הדרכה. כחימום, קודם כל ודאו שאתם מבינים למה $H \triangleleft K$ ולמה טבעי להגדיר הומומורפיזם $f: G/H \rightarrow G/K$ לפי $f(gH) = gK$.

1. הוכיחו ש- f מוגדר היטב. כלומר, שאם $g_1H = g_2H$, אז $f(g_1H) = f(g_2H)$.

2. הוכיחו ש- f הומומורפיזם.

3. הוכיחו ש- f על.

4. הוכיחו כי $\ker f = K/H$.

5. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 6. תהי G חבורה ותהי $N \triangleleft G$. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

1. אם $K \triangleleft G$ וגם $N \cong K$, אז $G/N \cong G/K$.

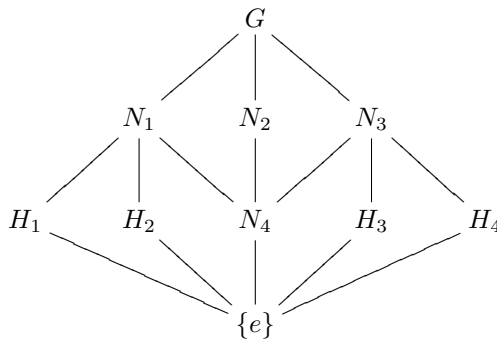
2. אם $G/N \cong G$, אז $N = \{e_G\}$.

3. אם N חבורת-2 לא טריוויאלית, וגם G/N חבורת-2 לא טריוויאלית, אז G אבלית.

4. תת־חבורת הקומוטטורים G' היא אבלית.

שאלות אתגר

שאלה 7. תהי חבורה G עם סריג תת־החבורות הבא:



כאשר $H_i \leq G$ ו- $N_i \triangleleft G$. הוכיחו כי $G \cong D_4$.
רמז: סמנו $k = [G : N_1]$ והשתמשו כמה פעמים במשפטי האיזומורפיזמים. כנראה
בדרך תצטרכו להוכיח ש- k ראשוני, ואז מוכרח להיות $k = 2$.

בהצלחה!