

הגדרה: נק' $a \in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) במרחב (X, d) אם –

$$\exists \epsilon > 0: B(a, \epsilon) = \{a\}$$

הערה: סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת (ברור מה הגבול!) בכל מרחב (X, d) .

טענה: a נקודה מבודדת במרחב מטרי (X, d) אם ורק אם

$$\lim x_n = a \text{ גורר שהסדרה } x_n \text{ היא בהכרח קבועה לבסוף } a, a, \dots, x_1, \dots, x_m.$$

הוכחה: אם a מבודדת אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B(a, \epsilon) = \{a\}$.

נניח ש $\lim x_n = a$.

עבור ϵ הנ"ל קיים $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n \in B(a, \epsilon) = \{a\}$ אז הסדרה היא לבסוף a .

נניח כעת ש a לא מבודדת. נוכיח שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a .

ברור $B(a, 1) \neq \{a\}$. נבחר $x_1 \in B(a, 1), x_1 \neq a$. נבחר $0 < \epsilon_2 < \min\{d(a, x_1), 1\}$.

נעיר ש $0 < d(a, x_1)$ כי (X, d) מרחב מטרי ומתקיימת m_1 .

שוב בגלל ש a לא מבודדת קיים $x_2 \in B(a, \epsilon_2), x_2 \notin \{a, x_1\}$

נמשיך בצורה רקורסיבית את הבנייה. אם כבר הגדרנו x_1, \dots, x_n אז נבחר

$$0 < \epsilon_{n+1} < \min\{d(a, x_1), d(a, x_2), \dots, d(a, x_n), \frac{1}{n}\}$$

קיים $x_{n+1} \in B(a, \epsilon_{n+1}), x_{n+1} \notin \{a, x_1, \dots, x_n\}$

כך נקבל סדרה (עם איברים שונים) ש $\lim x_n = a$ (כי $0 \leftarrow d(a, x_n) < \frac{1}{n}$).

דוגמה: על שלמים \mathbb{Z} נגדיר מטריקה p -אדית לכל מספר ראשוני $p \in \mathbb{P}$ נתון.

$$d_p(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{p^{k(x,y)}} & , k(x, y) := \max\{i : p^i | (x - y)\}, \quad x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

למשל:

$$.x = 24, y = 6, p = 3$$

$$d_3(24,6) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$24 - 6 = 18 = 3^2 \cdot 2$$

דוגמה של סדרה מתכנסת שהיא לא קבועה לבסוף עם איברים שונים:

$$x_n := 3^n \in \mathbb{Z}$$

– ואכן

$$x_n \xrightarrow{d_3} 0$$

– כי

$$d_3(3^n, 0) = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0$$

תרגיל: הוכיחו שלא קיימת נקודה מבודדת ב (\mathbb{Z}, d_p)

(שימו לב: במרחב \mathbb{Z} עם מטריקה רגילה כל נקודה היא מבודדת).

דוגמה:

ב - $C[0,1]$ קיימת סדרה f_n כך ש –

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{d_1} \theta - \text{פונקציית האפס} \\ f_n \xrightarrow{d_{max}} \theta - \text{פונקציית האפס} \end{cases}$$

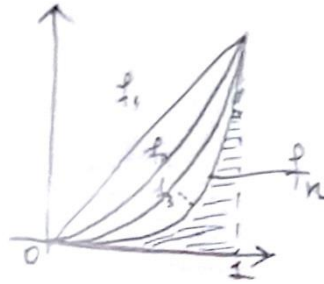
– כאשר (תזכורת)

$$d_1(f_1, f_2) := \int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)| dx \quad \text{"השטח"}$$

$$d_{max}(f_1, f_2) := \max_{0 \leq x \leq 1} |f_1(x) - f_2(x)|$$

נגדיר סדרה של פונקציות (סדרה ב - $C[0,1]$)

$$f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$$



$$\theta = 0(x) = 0$$

$$d_1(f_n, \theta) = \int_0^1 |f_n(x) - 0| dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ז"א -

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(f_n, \theta) = 0$$

$$f_n \xrightarrow{d_1} \theta$$

כעת -

$$d_{max}(f_n, \theta) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - 0(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} x^n = 1 \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow d_{max}(f_n, \theta) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{d_{max}} \theta$$

תרגיל: באופן דומה לכל $a < b$, $[a, b]$

הגדרות:

(א) נניח d, ρ מטריקות על אותה קבוצה X . אומרים ש- d דומיננטי ביחס ל- ρ אם:

$$\boxed{x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a}$$

לכל סדרה $x_n \in X$

(ב) אומרים ש- $d \sim \rho$ ("שקולות") אם יש אותה התכנסות. ז"א

$$\boxed{x_n \xrightarrow{d} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a}$$

תכונות פשוטות:

(1) $d \Leftarrow \rho \leq d$ (הסבר: דרך תכונת הסנדוויץ').

(2) $c > 0, d \sim c \cdot d$ קבוע.

דוגמה:

d_{max} דומיננטי ביחס ל- d_1 בקבוצה $C[a, b]$.

הסבר:

$$d_1 \leq c \cdot d_{max} \text{ - מ"ל}$$

$$\|\cdot\|_1 \leq c \cdot \|\cdot\|_{max} \text{ - מ"ל}$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \leq \underbrace{(b-a)}_{\text{קבוע } c>0} \cdot \underbrace{\max_{a \leq x \leq b} |f(x)|}_{=\|f\|_{max}}$$

דוגמה:

$$X := \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{d_{max} \sim d \sim d_1}$$

הסבר:

$$\boxed{d_{max} \leq d \leq d_1 \leq n \cdot d_{max}}$$

מסקנה: שלושת המטריקות הנ"ל שונות אבל יש אותה התכנסות.

בהמשך נוכיח – הטופולוגיות שוות!

הגדרה: (טופולוגיה של מרחב פסאודו-מטרי (X, d))

נגדיר טופולוגיה של (X, d) כאוסף של כל תת-קבוצות פתוחות ב- X . נסמן:

$$\mathbf{top}(d) = \mathbf{top}(X, d) := \{ \text{קבוצות פתוחות ב- } (X, d) \}$$

כאשר "קבוצה פתוחה" מוגדרת כך:

אומרים ש- $X \supseteq O$ היא פתוחה אם מתקיים:

$$\boxed{x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq O}$$

שימו לב: תת קבוצה $A \subseteq X$ לא פתוחה ב- (X, d) אם קיימת נקודה $a \in A$ כך ש

$B(a, \varepsilon)$ לא מוכל ב- A לכל $\varepsilon > 0$.

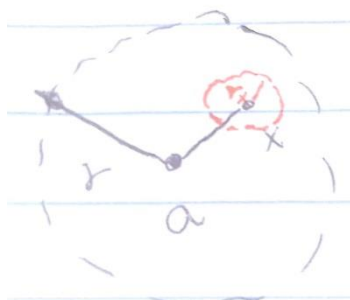
מכאן ברור למשל $\emptyset \in \text{top}(d)$.

מסקנה:

$$\text{top}(d) \ni \emptyset = \bigcup_{x \in \emptyset} B_{\epsilon_x}(x)$$

משפט: $\forall r > 0, \forall a \in X, \forall (X, d) : B_r(a) \in \text{top}(d)$

(ז"א "כדור פתוח" קבוצה פתוחה).

הסבר:

הרעיון: $d(a, x) + r_x < r$

מכאן ניקח כל מס' r_x כך:

$$0 < r_x < \underbrace{r - d(a, x)}_{\substack{\text{חיובי} \\ \text{כי } x \in B_r(a)}}$$

נוכיח $B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$

נניח $y \in B_{r_x}(x)$, צ"ל $y \in B_r(a)$.

$$d(a, y) \stackrel{m_3}{\leq} d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + r_x < r$$

$$\Rightarrow d(a, y) < r$$

ז"א $y \in B_r(a)$

זה קורה עבור כל $x \in B_r(a)$ (ועבור r_x מתאים) ולכן $B_r(a)$ קבוצה פתוחה.

■

תוצאה: {כדורים פתוחים} בסיס לטופולוגיה $(\text{top}(d))$

התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \emptyset \neq \emptyset \in \text{top}(d)$$

(2) $= 0$ איחוד של "כדורים פתוחים".

תרגיל: הוכיחו שלכל מרחב $(X, top(d))$ מתקיים:

$$\emptyset, X \in top(d) \quad (t_1)$$

$$O_1, O_2 \in top(d) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in top(d) \quad (t_1)$$

(חיתוך סופי של קבוצות פתוחות גם)

$$\forall i \in I \quad O_i \in top(d) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in top(d) \quad (t_1)$$

(איחוד של קבוצות פתוחות גם)

הערה: אחד מהמתמטיקאים שהשפיעו על טופולוגיה בצורה מאוד חזקה היה *Felix Hausdorff*. על החיים ומותו הטרגי בתקופת הנאצים בגרמניה ממליץ לקרוא

https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff

משפט (תכונת Hausdorff): נניח (X, d) מרחב מטרי. אז לכל 2 נקודות שונות יש סביבות זרות.

הוכחה:

$$a \neq b \stackrel{m_1}{\Rightarrow} d(a, b) > 0$$

$$\text{ניקח } 0 < \epsilon \leq \frac{d(a,b)}{2}$$

$$\text{אז } B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$$

אם נניח שלא:

$$\exists x \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b)$$

$$\begin{cases} d(a, x) < \epsilon \\ d(b, x) \stackrel{m_2}{\cong} d(x, b) < \epsilon \end{cases}$$

נחבר את 2 המשוואות:

$$d(a, b) \stackrel{m_3}{\leq} d(a, x) + d(x, b) < 2\epsilon$$

$$\Rightarrow d(a, b) < 2\epsilon$$

סתירה לבחירה.

■

משפט (יחידות הגבול): במרחב מטרי גבול סדרה הוא יחיד (אם קיים).

הוכחה:

אם נניח בשלילה –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$$

כאשר $a \neq b$.

לפי משפט 2 (תכונת Hausdorff) יש סביבות זרות –

$$B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$$

מצד שני, כמעט כל האיברים x_n נמצאים ב- $B_\epsilon(a)$ וגם ב- $B_\epsilon(b)$.

מכאן סתירה \Leftarrow מש"ל.

■

דוגמה נגדית (במרחב פסאודו-מטרי אין יחידות הגבול)

במרחב פסאודו-מטרי (\mathbb{R}^2, ρ_1) עם

$$\rho_1(x, y) := |x_1 - y_1|$$

ניקח את הסדרה

$$x_n = \left(1 + \frac{2}{n}, 7\right) \rightarrow \forall y \in \mathbb{R}: (1, y)$$

אין יחידות של הגבול! (צריך לשים לב שזאת לא מטריקה).

תרגיל: הוכיחו שמרחב פסאודו-מטרי עם יחידות הגבול הוא תמיד מרחב מטרי.

הערה:

ב- (X, d) מ"פ, $a \in X$, x_n סדרה. התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0 \iff (d(x_n, a) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0)$$

$$(2) \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, n > N: d(x_n, a) < \epsilon$$

(3) בכל ϵ -סביבה של a (ז"א בכל $B(a, \epsilon)$) נמצאים כמעט כל האיברים של הסדרה.

(4) בכל קבוצה פתוחה O שמכילה את a , כמעט כל האיברים נמצאים ב- O .

הגדרה: ת"ק A במרחב (X, d) נקראת **סגורה** אם המשלים קבוצה פתוחה.

ז"א אם

$$A^c := X/A \in \text{top}(d)$$

למשל:

$B_r[a]$ ("כדור סגור") הוא סגור.

לבדוק לבד! (יש הוכחה פשוטה גם דרך רציפות פונקציות!)

תרגיל: איחוד סופי של קבוצות סגורות סגור. חיתוך של קבוצות סגורות סגור.

רמז: ניתן להוכיח את זה ע"י התכונות של קבוצות פתוחות וחוקי דה-מורגן.

תרגיל: הוכיחו שכל נקודון סגור במרחב מטרי (ושזה לא נכון במרחב פסאודו-מטרי).

הסיקו שכל תתקבוצה סופית במרחב מטרי היא סגורה.

סדרות קושי ושלמות

הגדרה: (X, d) מ"מ. סדרה $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ נקראת **סדרת קושי** (Cauchy) אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$d(x_i, x_j) < \epsilon$$

$$i, j \geq n_\epsilon$$

הערה:

אם x_n מתכנסת ב- X ($\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in X$) אז סדרת קושי (לבדוק!).

הגדרה: מ"מ (X, d) נקרא **שלם** (Complete) אם לכל סדרת קושי x_n ב- X יש גבול ב- X .

הגדרה: מ"מ $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** (Banach space) אם $(E, d_{\|\cdot\|})$ שלם.

דוגמאות:

(א) (\mathbb{R}^n, d) , (\mathbb{R}^n, d_1) , (\mathbb{R}^n, d_{max}) \in Banach.

(ב) $Banach \ni (C[a, b], d_{max})$.

(ג) $Banach \ni (C[a, b], d_1)$ (פרטים בתרגול).

(ד) $Banach \ni (C[a, b], d_2)$,

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$ שממנה מקבלים נורמה:

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

הנורמה מגדירה מטריקה d_2 על מרחב הפונקציות $C([a, b])$.

(ה) $Banach \ni (l_2, \|\cdot\|)$.

(ה) נגדיר –

$$l_\infty := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \mid \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty \right\}$$

מרחב של סדרות חסומות.

כעת $Banach \ni (l_\infty, \|\cdot\|)$.

הכללה: מרחב פונקציות חסומות על קבוצה S

$$l_\infty(S) := \{ f: S \rightarrow \mathbb{R} \mid f(S) \text{ חסום ב- } \mathbb{R} \}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in S} |f(x)|$$

2 מקרים פרטיים:

$$l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty, \text{ אז נקבל את } l_\infty \text{ (1)}$$

$$l_\infty(\{1, 2, \dots, n\}) = \mathbb{R}^n, \text{ אז נקבל את } (\mathbb{R}^n, d_{max}) \text{ (2)}$$

(ז) כאן $l_2 =$ "מרחב הילברט סדרתי":

הכללה הכי טבעית של מרחב אוקלידי (אבל בעל מימד אינסופי).

$$l_2 := \{ (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \}$$

מרחב ווקטורי עם חיבור וכפל בסקלר רגיל.

יש מכפלה פנימית –

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$$

דוגמאות נוספות לשיכונים איזומטריים

(1) $\mathbb{R}^n \hookrightarrow l_2$ לפי:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$$

זהו שיכון איזומטרי לינארי (לבדוק!).

(2) $(\mathbb{N}, d_{\Delta}) \hookrightarrow l_2$ לפי:

$$n \mapsto \frac{e_n}{\sqrt{2}}$$

הערה:

2 תכונות מאוד חשובות של שלמות:

(1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות (אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלמה לגבי מטריקת הצמצום).

(2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d) . אז אם (Y, d_Y) שלם אז סגורה ב X .

רמז: תת קבוצה היא סגורה \Leftrightarrow היא "סגורה בנוגע להתכנסות".

דוגמה:

$X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם!

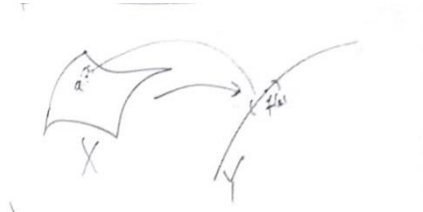
לדוגמה עבור $p = 3$:

$$x_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב X (פרטים בתרגול).

פונקציות רציפות

הגדרה (רציפות): נניח (X, d) , (Y, ρ) מרחבים. פונקציה $f: X \rightarrow Y$ נקראת **רציפה בנקודה** אם $a \in X$:



$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: d(a, x) < \delta \Rightarrow \rho(f(a), f(x)) < \epsilon$$

נסמן:

$$f \in C(X, Y)$$

continuous functions

אם $Y = \mathbb{R}$ אז $f \in C(X)$.

f נקראת **רציפה**, כאשר f רציפה בכל נקודה $a \in X$.

הגדרה: אומרים ש- f **רציפה במידה שווה (במ"ש)** *uniformly continuous*

אם בבחירה של δ אין תלות ב- a . ז"א –

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta: d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$$

$$f \in UC(X, Y)$$

הגדרה: אומרים ש- f מקיימת **תנאי ליפשיץ (Lipschitz)** לגבי המקדם $0 < c$ אם:

$$\forall x_1, x_2 \in X: \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2)$$

נסמן –

$$f \in Lip_c(X, Y)$$

כאשר –

$$Lip(X, Y) = \bigcup_{c>0} Lip_c(X, Y)$$

תמיד:

$$\boxed{Lip(X, Y) \subset UC(X, Y) \subset C(X, Y)}$$

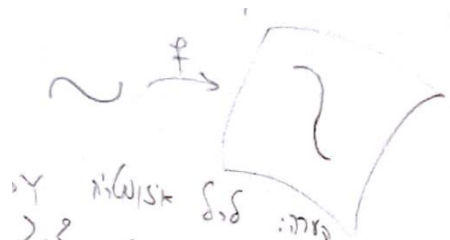
דוגמאות פשוטות מאנליזה:

$$f(x) = x^2, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

רציפה אבל לא במ"ש.

$$f(x) = \sqrt{x}, f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

רציפה במ"ש אבל לא ליפשיץ.

הערה: כל שיכון איזומטרי פונקצית ליפשיץ עם מקדם 1 (אבל לא ההפך! תנו דוגמה).הערה: אם קיימת איזומטריה, נסמנה –

$$(X, d) \simeq (Y, d)$$



זהו "יחס שקילות" באוסף Metr (מרחבים מטריים).

$$(1) (X, d) \simeq (X, d) \text{ (פ' הזהות).}$$

$$(2) (Y, \rho) \simeq (X, d) \Leftrightarrow (X, d) \simeq (Y, \rho) \text{ (פ' הופכית).}$$

(3)

$$\begin{cases} (X_1, d_1) \simeq (X_2, d_2) \\ (X_2, d_2) \simeq (X_3, d_3) \end{cases} \Rightarrow (X_1, d_1) \simeq (X_3, d_3) \quad (\text{ההרכבה})$$

תרגיל: הוכיחו שלא קיימת איזומטריה

$$(\mathbb{Z}, d_5) \neq (\mathbb{Z}, d_3)$$

דוגמאות:

(1) $Lip_1(X, \mathbb{R}) \ni f_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$f_A(x) = d(x, A)$$

הסבר: שימוש באי שוויון

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

$$\forall x, y \in X, \emptyset \neq A \subset \underbrace{(X, d)}_{\text{מרחב פ"מ}}$$

(2) $Lip_1(E, \mathbb{R}) \ni f: E \xrightarrow{\|\cdot\|} [0, \infty)$ כאשר E מרחב נורמי.

$$x \mapsto \|x\|$$

הסבר:

$$|\|u\| - \|v\|| \leq_{c=1} \|u - v\|$$

(3) הזזה במ"נ (מרחב נורמי) היא תמיד איזומטריה.

$$T_v: E \rightarrow E$$

$$T_v(x) = v + x$$

$v \in E$ וקטור נתון.

הסבר:

$$\|T_v(z) - T_v(y)\| = \|(v + z) - (v + y)\| = \|z - y\|$$

משפט (עיקרון Haine): נניח $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \rightarrow Y$ התנאים הבאים שקולים:

(1) f רציפה.

(2) f שומרת על התכנסות (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

(3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח. ז"א,

$$\forall O \in \text{top}(\rho): f^{-1}(O) \in \text{top}(d)$$

נוכיח בהרצאה הבאה! קודם נדון כמה תוצאות.

משפט (השוואת טופולוגיות): נניח ש- d, ρ מטריקות על אותה קבוצה X . אז התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \text{top}(\rho) \subseteq \text{top}(d)$$

(2) d דומיננטי ביחס ל- ρ ז"א –

$$x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a$$

הוכחה:

נגדיר את "פונקציית הזהות" –

$$(X, d) \xrightarrow{id} (X, \rho)$$

$$x \mapsto x$$

בתפקיד של f ונשתמש במשפט הקודם (עיקרון היינה).

כש- $f = id$, אז $f^{-1}(O) = O$. לכן תנאי 3 מעיקרון היינה יהיה –

$$\forall O \in \text{top}(\rho): O \in \text{top}(d)$$

$$\Rightarrow \text{top}(\rho) \subseteq \text{top}(d)$$

תנאי 2 בעיקרון היינה נותן לנו ישירות את התנאי השני במשפט שלנו.

■

תוצאה: התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \text{top}(d) = \text{top}(\rho)$$

$$(2) \rho \sim d$$

הסבר:

נובע מיד! 2 כיוונים במשפט הקודם.

דוגמה:

$$(1) \text{ עבור } X = \mathbb{R}^n$$

$$\text{top}(d_{max}) = \text{top}(d) = \text{top}(d_1)$$

כי:

$$d_{max} \sim d \sim d_1$$

(2) עבור $(a < b) X = C[a, b]$:

$$\text{top}(d_1) \subsetneq \text{top}(d_{max})$$

כי d_{max} דומיננטי ביחס ל- d_1 :

$$d_1 \leq (b - a)d_{max}$$

לכן לפי משפט ההשוואה נקבל שיש הכלה של הטופולוגיות.

ש- כעת, יש הכלה ממש כי קיימת סדרה f_n ב- $C[a, b]$ ($a < b$) וגם סדרה f ב- $C[a, b]$ כך

$$f_n \xrightarrow{d_1} f, f_n \not\xrightarrow{d_{max}} f$$

ראינו דוגמה בהרצאה קודמת יותר ב- $[0, 1]$.

שאלה:

למצוא תת קבוצה $A \subset C[0, 1]$ כך ש- $A \in \text{top}(d_{max})$

$$A \in \text{top}(d_{max})$$

$$A \notin \text{top}(d_1)$$