ב"ש אנליזה 2 תשעז מועד א

1. חשבו את:

(א) $\int \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}\int \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{cc} f=\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & f'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2+1} \\ g'=1 & g=x\end{array}\right\} \\ &= x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\int -\frac{1}{x^2+1}\cdot x\mathrm{d}x \\ &= x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1+C\right|\end{aligned}$$

(ב) $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\left[1-\sin^2(x)\right]}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c} t=\sin(x) \\ \mathrm{d}t=\cos\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\int\frac{1}{-t^2+t+2}\mathrm{d}t=-\int\frac{1}{(t-2)(t+1)}\mathrm{d}t$$

נמשיך עם חישוב $\int\frac{1}{(t-2)(t+1)}\mathrm{d}x$. בעזרת שברים חלקיים, קיימים A,B קבועים כך ש

$$\frac{1}{(t-2)(t+1)}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t+1}$$

נעשה מכנה משותף והשוואת מונים לקבל $1=A(t+1)+B(t-2)$. הצבה $t=-1$ תתן $1=-3B$ ולכן $B=-\frac{1}{3}$. הצבה $t=2$ תתן $1=3A$ ולכן $A=\frac{1}{3}$. ולכן

$$\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{(t-2)(t+1)}\mathrm{d}t=-\left[\frac{1}{3}\int\frac{1}{t-2}\mathrm{d}t-\frac{1}{3}\int\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{3}\left[-\ln|t-2|+\ln|t+1|\right]+C$$

ובסה"כ נקבל שהתשובה הסופית, לפי מונחי x המקוריים היא:

$$\frac{1}{3}\left[-\ln|\sin(x)-2|+\ln|\sin(x)+1|\right]+C$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=xe^{\left(\frac{1}{x}\right)}$.

פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת באפס, נחשב את הגבול מימין

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)' \cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \{e^{\infty}\} = \infty$$

ונחשב את הגבול משמאל

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \{0\cdot e^{-\infty}\} = 0$$

ולכן יש אסימפטוטה אנכית $x=0$ (מצד ימין).

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to\infty} xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \left\{\infty\cdot e^{0}\right\} = \infty$$

ואין אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \left\{-\infty\cdot e^{0}\right\} = -\infty$$

ואין אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$.

פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא ∞ שהרי ב $x=1$ שהרי המונה x^2-x+1 לא מתאפס ($(-1)^2-4\cdot1\cdot1<0$). נראה שהאינטגרל שלנו חבר של האינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ שמתכנס ולכן גם מתכנס. לכל $x\geq 1$ מתקיים כי $0<x^2-x+1$ שהרי x^2-x+1 אינו מתאפס והצבה שרירותית של 2 תראה ש $2^2-2+1>0$. בנוסף $\arctan(x)>0$ בתחום לכל x חיובי ובפרט לכל $x\geq 1$. ולכן $\frac{\arctan(x)}{x^2-x+1}>0$ בתחום $[1,\infty)$ ואפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\arctan(x)}{x^2-x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\arctan(x)}{x^2-x+1} \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x)}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{\pi/2}{1-0+-} = \frac{\pi}{2}$$

וקיבלנו שהאינטגרלים חברים (קיבלנו מספר סופי שונה מאפס).

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\mathrm{d}t}{e^x-1}.$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$ (כיוון ש e^{-t^2} רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\mathrm{d}t}{e^x-1} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}+e^{-(-x)^2}}{e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-x^2}}{e^x} = 2\cdot\frac{1}{1} = 2$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n}$

פתרון: מתקיים

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n} \geq n \cdot \frac{n}{n+n} = n \cdot \frac{1}{2} \to \infty$$

ולפי חצי סנוויץ, נקבל ש $a_n \to \infty$.

.4

(א) קרבו את $\int_0^1 \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

פתרון: טור טיילור של $\sin(x)$ הוא

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ואם נציב x^2 במקום x, נקבל

$$\sin\left(x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(x^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

ולכן

$$\int_0^1 \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 \left(x^{4n+2}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{4n+3}$$

וכעת: כיוון שזהו טור לייבניץ מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{4n+3}\right| \leq \left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{4k+3}\right| = \frac{1}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{4k+3}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\int_0^1 \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{4n+3}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{4k+3} \leq \frac{1}{100}$. עבור $k = 2$ נקבל $\frac{1}{120} \cdot \frac{1}{11} < \frac{1}{100}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{2-1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{4n+3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{7} = \frac{13}{42}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.

(ב) חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!-1}{2^n n!}$.

פתרון: נסדר קצת

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!-1}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}$$

כאשר המעבר מוצדק ע"י שנראה ששני הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n n!}$ מתכנסים ובעזרתם נחשב את התשובה הסופית.
הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot (2) = 1$$

פשוט לחישוב כי זהו טור הנדסי. כעת, לטור השני:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = e^{\frac{1}{2}} - 1$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהשיוויון הידוע ש $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (לכל x). לכן התשובה הסופית היא

$$1 - \left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 2 - e^{\frac{1}{2}}$$

5. תהיינה פונקציות f, g פונקציות חיוביות כך ש $\frac{f'g - g'f}{g^2} \leq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

(א) הוכיחו/הפריכו: אם האינטגרל $\int_0^{\infty} f$ מתכנס אז גם $\int_0^{\infty} g$ מתכנס.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם האינטגרל $\int_0^{\infty} g$ מתכנס אז גם $\int_0^{\infty} f$ מתכנס.

פתרון: נשים לב שכיוון ש g חיובית נוכל להסתכל על הפונקציה $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ואז $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$. לפי הנתון $h'(x) \leq 0$ לכל x ולכן נסיק ש h פונקציה יורדת. מכאן ש $h(x) \leq h(0)$ לכל $0 \leq x$. מכאן שלכל $0 \leq x$ מתקיים

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(0)}{g(0)}$$

ולכן

$$f(x) \leq \frac{f(0)}{g(0)} g(x)$$

ולכן $\int_0^{\infty} g$ מתכנס אז גם $\int_0^{\infty} \frac{f(0)}{g(0)} g = \frac{f(0)}{g(0)} \int_0^{\infty} g$ כי זה כפל בקבוע. ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון (כיוון ש f, g חיוביות וגם $\frac{f(0)}{g(0)}$ חיובי) נקבל ש $\int_0^{\infty} f$ מתכנס. וזה עונה על הסעיף השני. לגבי הסעיף הראשון, נוכל לתת כדוגמה נגדית את הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \\ -2x + 3 & x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ -x + 2 & x < 1 \end{cases}$$

מתקיים ש

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-2(1+h) + 3 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-2h}{h} = -2$$

וגם

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -2 \frac{1}{1^3} = -2$$

ולכן $f'(1) = -2$. באופן דומה $g'(1) =$ ולכן

$$f'(x) = \begin{cases} -2\frac{1}{x^3} & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x \geq 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

ובנוסף, f,g חיוביות ומתקיים

$$f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=\begin{cases}-2\frac{1}{x^4}-\left(-\frac{1}{x^4}\right) & x\geq 1\\ -2\left(-x+2\right)-\left(-1\right)\left(-2x+3\right) & x<1\end{cases}$$

ומכיוון ש $-2\frac{1}{x^4}-\left(-\frac{1}{x^4}\right)=-\frac{1}{x^4}<0$ וגם

$$-2\left(-x+2\right)-\left(-1\right)\left(-2x+3\right)=2x-4+\left(-2x+3\right)=-1<0$$

נקבל שאכן $\frac{f'g-g'f}{g^2}\leq 0$ לכל x (החילוק במשהו חיובי, לא משנה את הסימן). ומצאנו הפרכה לסעיף א.