תרגיל 10 - פתרון

שאלה 1

יהי H מרחב הילברט. ו- M תת מרחב לינארי סגור של H.

הוכיחו כי: $(M^\perp)^\perp = M$.

פתרון:

יהיו $f\in\bar{M}$, $g\in M^\perp$: תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq M$ כך ש- $\|f_n-f\|\to 0$

אזי, מרציפות המכפלה הפנימית נקבל כי $\langle f_n,g\rangle \to \langle f,g\rangle$,

ומכיון שלכל n מתקיים $\langle f_n,g\rangle=0$, הרי ש- $\langle f,g\rangle=0$,

וכאמור, לכל $g\in M^\perp$ ולכל $f\in\bar{M}$ לכן $\bar{M}\subseteq (M^\perp)^\perp$. (1)

כעת, $\bar{M}$ תת מרחב לינארי סגור של מרחב הילברט H. לכן, לכל $x\in H$

קיימים $g\in M^\perp$, $h\in\bar{M}$ יחידים כך ש- $x=g+h$.

בפרט, עבור $f\in(M^\perp)^\perp$: $\exists!\ g_0\in M^\perp, h_0\in\bar{M} : f=g_0+h_0$.

לפי (1), $h_0\in(M^\perp)^\perp$, ומכיון ש $(M^\perp)^\perp$ תת מרחב לינארי, הרי ש:

$f,h_0\in(M^\perp)^\perp \Rightarrow f-h_0\in(M^\perp)^\perp$, כלומר: $g_0\in(M^\perp)^\perp$.

לכן: $g_0\in(M^\perp)^\perp\cap M^\perp$. אולם $(M^\perp)^\perp\cap M^\perp=\{0\}$.

קיבלנו: $0=g_0=f-h_0$, כלומר: $f=h_0$.

מכיון ש $h_0\in\bar{M}$ הרי ש- $f\in\bar{M}$. וכאמור, לכל $f\in(M^\perp)^\perp$,

לכן $(M^\perp)^\perp\subseteq\bar{M}$.

בסה"כ: $(M^\perp)^\perp=\bar{M}$.

שאלה 2 : נגדיר: $F := \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \sup_n n|a_n| < \infty \}$

הוכיחו או הפריכו:

א) F תמ ליניארי של ℓ^2.

ב) הקבוצה $F \cap \ell^2$ סגורה ב-ℓ^2.

פתרון: א) נוכיח כי F תמ ליניארי של ℓ^2:

ברור כי $0 \in F$, ובנוסף:

$$(a_n),(b_n) \in F \Rightarrow \sup_n n|a_n| \,,\ \sup_n n|b_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n n(|a_n|+|b_n|) < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n n|a_n+b_n| < \infty \Rightarrow (a_n+b_n) \in F$$

$$(a_n)\in F,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \sup_n n|a_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n n|\alpha a_n| = \alpha \sup_n n|a_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \alpha(a_n) \in F$$

הוכחנו כי F מרחב ליניארי.

נראה כי $F \subseteq \ell^2$: תהי $(a_n)\in F$ אזי:

$$M := \sup_n n|a_n| < \infty \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: \ n|a_n| < M$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{M}{n}$$

כעת הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{n^2}$ מתכנס, ולכן (לפי מבחן ההשוואה) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ מתכנס, כלומר $(a_n)\in \ell^2$ - כנדרש.

ב) נמצא דוגמא נגדית: לכל $k\in\mathbb{N}$ נגדיר:

$$a_k = (a_n^k) := \begin{cases} a_n^k = \frac{1}{n^{3/4}} & n \leq k \\ a_n^k = 0 & n > k \end{cases}$$

אז: הסדרה a_k מתכנסת ב ℓ^2 ל: $a=(a_n)=\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)_{\mathbb{N}}$

שכן: $\|a-a_k\|_2 = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

(כזנב של טור מספרים מתכנס)

בנוסף, לכל k: $\sup_n n|a_n^k| = k^{1/4} < \infty$

ולכן $a_k=(a_n^k)\in F\overset{(*)}{\subseteq}\ell^2 \Leftarrow a_k\in F\cap\ell^2$.

אולם $\lim_{k\to\infty} a_k = a \notin F$ שכן:

$$\sup_n n|a_n| = \sup_n n^{1/4} = \infty$$

ולכן: $F\subset\ell^2$ לא סגורה ב ℓ^2.

שאלה 3

יהיו:
$$u_1 = (1,2,0,0,\dots)$$
$$u_2 = (0,1,2,0,\dots)$$
$$\vdots$$

1) הוכיחו כי המערכת $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה שלמה במרחב ℓ^2.

2) נסמן: $U = \operatorname{span}\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $V = \operatorname{span}\{(1,0,0,\dots)\}$.

האם $U+V$ צפוף ב ℓ^2 ?

פתרון:

1) יהי $x \in \ell^2$ כך ש- $\forall n\in\mathbb{N}\ \langle x, u_n\rangle = 0$

כלומר:
$$\langle x, u_1\rangle = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 0$$
$$\langle x, u_2\rangle = 0 \Rightarrow x_2 + 2x_3 = 0$$
$$\vdots$$
ובאופן כללי:
$$\langle x, u_n\rangle = 0 \Rightarrow x_n + 2x_{n+1} = 0$$

קבלנו: $x = (x_n) = x_1 \cdot (a_n)$ כאשר $a_n = (-2)^{-n+1}$, $a = (a_n)$.

מסקנה: $\exists t\in\mathbb{R} : x = t\cdot a \iff \forall n\in\mathbb{N}\ \langle x, u_n\rangle = 0$

כלומר: $(\operatorname{span}\{u_n\}_{n=1}^{\infty})^{\perp} = \operatorname{span}\{a\}$ (*)

כעת, נזכיר שהראינו בשאלה 1 כי: $\overline{\operatorname{span}\{u_n\}_{n=1}^{\infty}} = \left((\operatorname{span}\{u_n\}_{n=1}^{\infty})^{\perp}\right)^{\perp}$

לפי (*), הרי ש- $\overline{\operatorname{span}\{u_n\}_{n=1}^{\infty}} = (\operatorname{span}\{a\})^{\perp}$

אולם $span\{a\} \neq \{0\}$ ולכן $(span\{a\})^\perp \neq \ell^2$.

ונסיק שהמערכת $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה שלמה ב ℓ^2.

2) נוכיח כי $U+V$ צפוף ב ℓ^2:

צריך להראות כי $\overline{U+V} = \ell^2$.

כלומר, לפי שורה 1, צ"ל: $((U+V)^\perp)^\perp = \ell^2$.

ולכן מספיק שנראה כי: $(U+V)^\perp = \{0\}$.

הוכחנו בתרגול כי $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

לכן, צ"ל: $U^\perp \cap V^\perp = \{0\}$.

יהי $x \in U^\perp \cap V^\perp$. אזי:

$x \in U^\perp$ לכן, לפי ההוכחה בסעיף הקודם: $\forall_{n\in\mathbb{N}}: x_n = x_1(-a)^{1-n}$

בנוסף, $x \in V^\perp$ ולכן $x_1 = 0$.

ונסיק ש- $x_n = 0$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$, כלומר $x = \bar{0}$. ∎

שאלה 4

נניח ו H הינו מרחב הילברט עם בסיס בן מנייה ונניח כי $\|x_n\| \to \|x\|$ כאשר $n \to \infty$ וגם $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ לכל $y \in H$ כאשר $n \to \infty$.

הוכיחו כי $\|x_n - x\| \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

פתרון:

מכיוון שיש לנו בסיס בן מנייה $\{\varphi_n\}$ נוכל לרשום $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n \varphi_n$ וגם $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_n$.

למדנו כי $a_k = \langle x, \varphi_k\rangle$ וגם כי $a_k^n = \langle x_n, \varphi_k\rangle$, ולכן מהנתון כי $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ נובע כי $a_k^n \to a_k$

ומהנתון כי $\|x_n\| \to \|x\|$ נובע כי $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n|^2 \to \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

אנחנו צריכים להוכיח כי $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2 \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

ברור כי $|a_k^n - a_k|^2 \le |a_k^n|^2 + |a_k|^2$ ולכן עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |a_k^n - a_k|^2 = 0 .$$

שאלה ב

תהי: $E := \{ x \in \ell^2 \mid \forall n\in\mathbb{N} : x_{2n-1} = x_{2n} \}$

1) הוכחו כי E תת״מ סגור של ℓ^2.

2) מצאו את $E^\perp$.

3) יהי $x \in \ell^2$. מצאו את הקירוב הטוב ביותר של x ב-E.

<u>פתרון:</u>

1) קל לוודא כי E תת מרחב של ℓ^2 (וודאו!).

נוכיח כי E <u>סגור</u> ב-ℓ^2.

תהי $\{a^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ כך ש- $\|a^n - a\|_2 \to 0$ עבור $a \in \ell^2$.

צריך להוכיח כי $a \in E$.

$$\|a^n - a\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a^n_k - a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a^n_{2k-1} - a_{2k-1}|^2 + |a^n_{2k} - a_{2k}|^2 =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a^n_{2k-1} - a_{2k-1}|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a^n_{2k-1} - a_{2k}|^2}_{\geq 0}$$

$a^n \in E$, וכן הטור מתכנס.

לכן: $\|a^n - a\|_2 \to 0 \Rightarrow \|(a^n_{2k-1})_N - (a_{2k-1})_N\|_2 \to 0$

<u>וגם:</u> $\|(a^n_{2k-1})_N - (a_{2k})_N\|_2 \to 0$

ולכן, מ<u>יחידות</u> הגבול, נקבל כי לכל k: $a_{2k-1} = a_{2k}$

כלומר: $a \in E$.

(2 נגדיר: $F := \{ x \in \ell^2 \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{2n-1} = -x_{2n} \}$

נראה כי: $E^\perp = F$.

יהי $x \in E^\perp$. אזי בפרט, לכל $k \in \mathbb{N}$, x מאונך לוקטור e^k שמוגדר:

$$e^k(j) = \begin{cases} 1 & j = 2k-1 \text{ או } j = 2k \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולכן:

$$\forall k \quad x_{2k-1} + x_{2k} = 0$$

כלומר $x \in F$. מסקנה: $E^\perp \subseteq F$.

מצד שני אם $x \in F$ אזי, לכל $y \in E$ מתקיים:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1} y_{2k-1} + x_{2k} y_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-x_{2k}) y_{2k} + x_{2k} y_{2k} = 0$$

לכן $x \in E^\perp$, וכיוון שכך לכל $x \in F$, מתקיים: $F \subseteq E^\perp$.

ובסה"כ: $E^\perp = F$.

(3 יהי $x \in \ell^2$, לכל n:

$$(*) \quad x_{2n-1} = \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2} + \frac{x_{2n-1} - x_{2n}}{2}.$$

$$x_{2n} = \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2} + \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{2}.$$

נגדיר: $g = (g_n)$: $g_{2n} = g_{2n-1} = \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2}$

$h = (h_n)$: $-h_{2n} = h_{2n-1} = \frac{x_{2n-1} - x_{2n}}{2}$

אזי $g \in E$

ולפי הסעיף הקודם $h \in E^\perp$.

כמובן, ולפי (*), נקבל $x = g + h$. (**)

כיוון שהוכחנו בסעיף הראשון ש E הוא <u>סגור</u> הפירוק (**)

הזה יחיד, ו-g הוא <u>ההיטל</u> של x על E ששווה

לקירוב הטוב ביותר של x ל- E.