

## תרגיל 8

1. אם  $(X, \tau)$  מ"ט  $B_2$  אזי  $|\tau| \leq 2^{\aleph_0}$

**פתרון:**

נתון שקיים בסיס  $\{O_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . מספר הקבוצות שניתן "לייצר" בעזרת איחודים מקבוצה זאת, חסום ע"י מספר תתי הקבוצות של  $\mathbb{N}$  ששווה ל  $2^{\aleph_0}$ .

2. אם  $(X, \tau)$  מ"ט ו  $B_\tau$  בסיס ל  $\tau$ . אזי כל  $B_\tau \subseteq B' \subseteq \tau$  היא בסיס גם כן.

**פתרון:**

תהא  $B'$  כנ"ל ותהא  $O$  פתוחה. אזי קיימות  $O_i \in B_\tau$  כך ש  $O = \cup_{i \in I} O_i$ . ואלו בפרט גם קבוצות ב  $B'$ .

3. יהא  $(X, \tau)$  מ"ט ו  $B_\tau$  בסיס ל  $\tau$ . תהא  $C$  המקיימת: כל קבוצה ב  $B_\tau$  היא איחוד של קבוצות מ  $C$ . הוכיחו כי  $C$  בסיס ל  $\tau$

**פתרון:**

תהא  $O$  פתוחה. אזי קיימות  $O_i \in B_\tau$  כך ש  $O = \cup_{i \in I} O_i$ . לכל  $i$  קיימות  $U_{i,j} \in C$  כך ש  $O_i = \cup_{j \in J_i} U_{i,j}$  ואז נקבל כי  $O = \cup_{i \in I} \cup_{j \in J_i} U_{i,j}$  איחוד של קבוצות מ  $C$ . כלומר  $C$  בסיס.

4. יהא  $X$  קבוצה ו  $\tau, \tau'$  טופולוגיות ו  $B_\tau, B_{\tau'}$  בסיסים להם, בהתאמה.

(א) הוכיחו כי אם  $B_\tau \subseteq B_{\tau'}$  אזי  $\tau \subseteq \tau'$

**פתרון:**

תהא  $O \in \tau$  אזי קיימות  $O_i \in B_\tau$  כך ש  $O = \cup_{i \in I} O_i$ . בפרט  $O_i \in B_{\tau'}$  ולכן  $O = \cup_{i \in I} O_i \in \tau'$ .

(ב) הפריכו את הכיוון השני. כלומר, אם  $\tau \subseteq \tau'$  אזי לא בהכרח  $B_\tau \subseteq B_{\tau'}$ .

**פתרון:**

נקח  $X = \mathbb{R}$  ונגדיר  $\tau = \tau'$  להיות הטופולוגיה הרגילה.  $B_\tau = \{B(x, r) : x \in \mathbb{R}, 0 < r \in \mathbb{R}\}$ . בסיס לטופולוגיה שאינה מוכלת בבסיס  $B_{\tau'} = \tau' = \tau$ .

5. תהא  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  רציפה ופתוחה. הוכיחו/הפריכו: אם  $X$  הוא  $B_2$  אזי גם  $f(X)$  הוא  $B_2$ .

**פתרון:**

הוכחה: בה"כ  $f$  על. נתון שקיים בסיס  $\{O_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ל  $X$ . כעת, תהא  $V$  פתוחה ב  $Y$ . אזי  $f^{-1}(V)$  פתוחה ב  $X$  ולכן  $f^{-1}(V) = \cup_{j \in J} O_{i_j}$ . כיון ש  $f$  על נקבל כי  $V = f(\cup_{j \in J} O_{i_j}) = \cup_{j \in J} f(O_{i_j})$  ומכאן ש  $\{f(O_{i_j})\}_{j \in J}$  בסיס בן מנייה ל  $Y$ .

6. יהא  $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$  (עבור  $p \notin \mathbb{R}$ ) ו  $\tau = \{O : p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$ . הוכיחו כי  $(X, \tau)$  אינו ספרבילי ואינו  $B_2$ .

**פתרון:**

לפי הגדרת  $\tau$  קבוצה  $A$  בת מניה היא סגורה כי המשלים שלה פתוח (כי המשלים שלה המשלים הוא  $A$  שהיא בת מניה..). לכן, כל קבוצה בת מניה  $A$  מקיימת  $\bar{A} = A$  בפרט לא קיימת קבוצה בת מניה  $A$  כך ש  $\bar{A} = \mathbb{R}$ .

7. בתרגיל זה נוכיח שת"מ של ספרבילי אינו בהכרח ספרבילי. נגדיר  $X = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \right\}$  (חצי מישור העליון). נגדיר

$$B_1 = \{B(x, r) : x \in X, 0 < r \in \mathbb{R}\} \cap X$$

$$B_2 = \left\{ B(x, x_2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} : x \in X \right\}$$

כאשר  $B(x, r)$  הוא הכדור "הרגיל" ב  $\mathbb{R}^2$ . במילים אחרות  $B_1$  הוא חיתוך של הכדורים  $B(x, r)$  ב  $\mathbb{R}^2$ . ו  $B_2$  הוא כל הכדורים הפתוחים שהסגור שלהם משיק ל "ציר ה  $x$ " איחוד נקודת ההשקה. נגדיר  $\tau$  להיות הטופולוגיה ש  $B_1 \cup B_2$  הוא הבסיס שלה.

(א) הוכיחו כי  $(X, \tau)$  ספרבילי.

**פתרון:**

נגדיר  $A = \mathbb{Q}^2 \cap X$  בת מניה. והיא צפופה כי היא נחתכת עם כל קבוצה פתוחה בסיסית. ולכן  $X$  ספרבילי.

(ב) נגדיר ת"מ  $Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$ . הוכיחו כי  $Y$  אינו ספרבילי.

**פתרון:**

לכל  $x_1$  ממשי מתקיים כי  $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in Y \cap \left[ B(x, x_2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right]$  ולכן

לכל  $x_1$  ממשי  $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  פתוח. כלומר  $Y$  הוא מרחב דיסקרטי שלא בן מניה ולכן לא ספרבילי.