תרגיל 3 - חשבון אינפי 3 תש"פ

תרגיל 1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n, Y\subseteq\mathbb{R}^m$ סגורות, אזי $X\times Y\subseteq\mathbb{R}^{m+n}$ סגורה. (רמז: כדאי להשתמש באחד מהקריטריונים שלמדנו לסגירות של קבוצות).
2. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n, Y\subseteq\mathbb{R}^m$ פתוחות, אזי $X\times Y\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ פתוחה. (רמז: ניתן גם ישרות, אבל אפשר להשתמש גם בסעיף הקודם).
3. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n, Y\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטיות, אזי $X\times Y\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ קומפקטית.
4. אם $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ ו $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית, אזי $[a,b]\,X=\{tx|t\in[a,b]\,,x\in X\}$ היא קבוצה קומפקטית.
5. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה ו $Y\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה, אזי $X\cap Y$ קומפקטית.
6. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ו $X\neq\emptyset$, לכל $x\in X$, $X\setminus\{x\}$ אינה קומפקטית.
7. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n$ ו $x\in X$ היא נקודה מובדדת, אזי x היא נקודת הצטברות של X^c.
8. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n$ ו X אינה פתוחה ואינה סגורה, אזי $X^\circ\subsetneq\overline{X}$.
9. תהי A קבוצה, ויהי A' אוסף נקודת ההצטברות שלה. הוכיחו או הפריכו

$$(A')'=A'\,.$$

תרגיל 2. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו אם היא פתוחה, סגורה, קומפקטית (ייתכן שאף אחד מאלה לא מתקיים). נמקו את תשובתכם.

1. $A=\left\{\frac{a}{2^n}\middle|a,n\in\mathbb{N},a<2^n\right\}$..
2. $A=(0,1)\times[0,1]$.
3. $A=\left\{(x,y,z)\,\middle|e^{xy}+z^2\le 2\right\}$.
4. $A=\left\{(x,y)\,|x+y^3>0,x>0,y<0\right\}$.
5. $A=\left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2<1\wedge x^2+y^2+z^2\neq\frac{1}{4}\right\}$
6. $A=\left\{x=(x_1,\dots,x_n)\in B\,(0,1)\,\middle|\forall n\in\mathbb{N},\|x\|\neq\frac{1}{n}\right\}$.

תרגיל 3. תהי $X \subseteq \mathbb{R}$, ו $f : X \to \mathbb{R}$ רציפה. נגדיר את הגרף של f על ידי

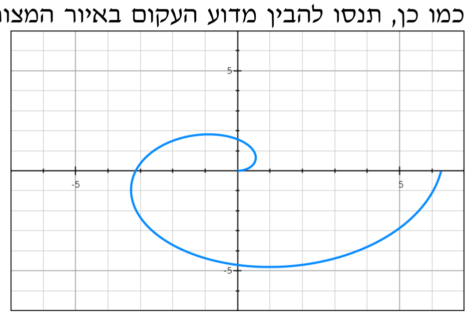
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \,|x \in \mathbb{R}\}.$$

ענו על השאלות הבאות:

1. הוכיחו/הפריכו: אם $X \subseteq \mathbb{R}^n$ היא קבוצה סגורה, ו $f : X \to \mathbb{R}$ רציפה אזי Γ_f היא קבוצה סגורה.
2. הוכיחו/הפריכו: אם $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ רציפה, Γ_f היא קבוצה סגורה.
3. נגדיר $S = \left\{(x, y) \,\middle|y = \frac{1}{x}, x > 0\right\}$. הראו, שקיימת $f : X \to \mathbb{R}$ כך ש $S = \Gamma_f$. האם S סגורה?
4. הוכיחו/הפריכו: אם $S \subseteq \mathbb{R}^2$ היא קבוצה סגורה, אזי ההיטל של S על ציר ה X, המוגדר על ידי $\{x| (x, y) \in S\} \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה.
5. אם $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ו $f : X \to \mathbb{R}$ רציפה, אזי $(\Gamma_f)^\circ = \emptyset$ (הפנים של Γ_f היא קבוצה ריקה).

תרגיל 4. מצאו את הסגור $\overline{A}$, הפנים A°, והשפה ∂A של A בכל אחד מהמקרים הבאים.

1. תיבה פתוחה n-מימדית ב $\mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי: $A = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$.
2. תיבה סגרורה n-מימדית המוגדרת על ידי $\mathbb{R}^n$ על ידי: $A = [a_1, b_1] \times \ldots [a_n, b_n]$.
3. $A = B(0, 1) \cap \left(\mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x, y) \,\middle|x = 0 \wedge y = 0\right\}\right)$.
4. $A = \{(t \cos t, t \sin t) \,|0 \leq t \leq 2\pi\}$. (הדרכה, השתמשו ברציפות ובקומפקטיות, כמו כן, תנסו להבין מדוע העקום באיור המצורף הוא שווה ל A).



5. $A = \left\{r (t \cos t, t \sin t) \,\middle|0 \leq r \leq t, 0 \leq t \leq 2\pi\right\}$. (הדרכה: השתמשו באחד מהסעיפים שהוכחתם בשאלה 1 בתרגיל הנוכחי).