תורת הקבוצות — תרגיל בית 4

חיים שרגא רוזנר

כ"ח בניסן, תשע"ה*

תקציר

איזומורפיזם סדר, חיבור סודרים, כפל סודרים, מונוטוניות ורציפות.

תזכורות

1. **חיבור סודרים**: יהיו α, β סודרים. נגדיר את **הסכום הזר** שלהם

$$\alpha \uplus \beta := \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$$

ניתן להגדיר, באופן טבעי, סדר מילוני על קבוצה זו.[1] הקבוצה $\alpha \uplus \beta$ סדורה היטב על פי סדר זה, וקיים סודר אחד ויחיד אליו הקבוצה איזומורפית. נסמן סודר זה $\alpha + \beta$. חיבור סודרים איננו חילופי (קומוטטיבי).

2. **חיסור סודרים**: יהיו $\alpha \leq \beta$. נגדיר חיסור סודרים $\beta - \alpha := \text{type}(\beta \setminus \alpha)$. מתקיימות התכונות הבאות (לפי תרגיל בית 3):

(א) $\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$.

(ב) $\alpha = \beta \iff \beta - \alpha = 0$.

(ג) $\alpha < \beta \iff \beta - \alpha > 0$.

3. **כפל סודרים**: יהיו α, β סודרים. אזי מכפלתם מוגדרת

$$\alpha \cdot \beta := \text{type}\left(\beta \times \alpha, <_{\text{lex}}\right)$$

דהיינו $\alpha \cdot \beta$ היא טיפוס הסדר של $\beta \times \alpha$ כאשר קבוצה זו מסודרת על ידי הסדר המילוני.

4. פונקציית סודרים $f \colon ON \to ON$ היא **מונוטונית** אם לכל שני סודרים $\alpha < \beta$ מתקיים $f(\alpha) < f(\beta)$; פונקציה מונוטונית כזו היא **רציפה** אם לכל סודר גבולי β מתקיים $f(\beta) = \sup\{f(\gamma) : \gamma < \beta\}$.

---

* להגשה עד יום **שני** ט"ו באייר (4 מאי) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

[1] הכוונה היא לסדר המושרה מהסדר המילוני על $2 \times (\alpha \cup \beta)$.

1 איזומורפיזם סדר ורישאות

1. הוכיחו כי קבוצה סדורה היטב אינה איזומורפית לאף רישא־ממש של עצמה. מצאו קבוצה A סדורה סדר מלא שהיא איזומורפית סדר לרישא־ממש של עצמה.

2 חיבור סודרים

1. אם $\beta_1 < \beta_2$, אז $\alpha+\beta_1 < \alpha+\beta_2$. הוכיחו גם את הכיוון השני, אם $\alpha+\beta_1 < \alpha+\beta_2$ אז $\beta_1 < \beta_2$.
2. בשיעור הראינו כי אם β גבולי, אז $\alpha + \beta$ גבולי. הראו כי אם β עוקב, אז $\alpha + \beta$ עוקב.
3. הפרך, על ידי דוגמאות נגדיות, כל אחת מהטענות הבאות:

   (א) אם $0 < \beta$ אז $\alpha < \beta + \alpha$.

   (ב) אם $\beta_1 < \beta_2$, אז $\beta_1 + \alpha < \beta_2 + \alpha$.

   (ג) אם β גבולי, אז $\beta + \alpha = \sup\{\gamma + \alpha \,:\, \gamma < \beta\}$.

   (ד) אם β גבולי, אז $\beta + \alpha$ גבולי.

   (ה) אם $\alpha < \beta$ גבוליים אז $\beta + \alpha = \alpha$.

3 כפל סודרים

1. הוכיחו:

   (א) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$.

   (ב) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

   (ג) $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$. נא להוכיח במישרין מן ההגדרות, ולא להסתמך על חוק הפילוג.

   (ד) אם β גבולי, $\alpha > 0$, אז $\alpha \cdot \beta$ גבולי.

2. הפריכו:

   (א) $(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$.

   (ב) אם $\beta_1 < \beta_2$ ו־$\alpha > 0$ אז $\beta_1 \cdot \alpha < \beta_2 \cdot \alpha$.

   (ג) $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.

   (ד) לכל β גבולי, $\beta \cdot \alpha = \sup\{\gamma \cdot \alpha \colon \gamma < \beta\}$.

4 מונוטוניות ורציפות

1. רשות: פונקציה מונוטונית מקיימת לכל סודר α בתחום, $f(\alpha) \geq \alpha$.
2. רשות: נגדיר את טופולוגיית הסדר (order topology) על הסודר α באמצעות בסיס המורכב מהקבוצות הבאות:

$$[0, \beta) = \{\gamma \colon \gamma < \beta\} = \beta$$
$$(\beta_1, \beta_2) = \{\gamma \colon \beta_1 < \gamma < \beta_2\} = \beta_2 \setminus S(\beta_1)$$
$$(\beta, \alpha) = \{\gamma \colon \beta < \gamma < \alpha\} = \alpha \setminus S(\beta)$$

שימו לב כי בבסיס זה נמצאים כל הנקודונים המכילים סודר עוקב וכן הנקודון $\{0\}$, אך אין נקודונים עבור סודרים גבוליים. הראו כי בטופולוגיה זו, פונקציה מונוטונית היא רציפה אם ורק אם היא מקיימת את ההגדרה לעיל.

3. הראו כי עבור $\alpha > 0$, $f(\beta) := \alpha \cdot \beta$ היא פונקציה מונוטונית ורציפה.

תוצאה אם β גבולי, $B \subseteq \beta$ המקיימת $\sup B = \beta$, אזי $\sup\{\alpha \cdot \gamma \colon \gamma \in B\} = \alpha \cdot \beta$.

4. הפריכו:
   (א) הפונקציה $f(\beta) = \beta + \alpha$ היא מונוטונית ורציפה.
   (ב) יהי $\alpha > 0$. הפונקציה $g(\beta) = \beta \cdot \alpha$ היא מונוטונית ורציפה.
   (ג) מצאו סודר גבולי β ותת־קבוצה שלו B המקיימת $\sup B = \beta$ אך $B \neq \beta$ עבורם $g(\beta) \neq \sup\{g(\gamma) : \gamma \in B\}$.

ב ה צ ל ח ה!