

פתרון מבחן תשעז מועד א

27 בפברואר 2017

1. משפט מהרצאה

2. משפט מהרצאה

3.

$$(א) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ נדרג}$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i. בסיס למרחב השורות הוא $B_R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (שורות שונות מאפס אחרי דירוג) ו

$$\dim R(A) = 2$$

בסיס למרחב עמודות הוא $B_C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (עמודות הצייר במדורגת הן עמודות 1+2)

ולכן עמודות 1+2 ב A מהוות בסיס ל $C(A)$

ii. אם נוסיף את הוקטורים $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ל B_R נקבל בסיס כי $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

קבוצה בת"ל (אם נשים אותם כשורות מטריצה נקבל צורה מדורגת מדרגה 4) עם 4 איברים ולכן לפי השלישי חינם - בסיס.

iii. בעצם צריך למצוא B כך ש $C(A) \subsetneq C(B)$. למשל

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ב)

i. $Im(T) = \{Tv : v \in \mathbb{R}^4\} = \{Av : v \in \mathbb{R}^4\} = C(A)$. משאלה קודמת והמימד הוא 2.

ii. $ker T = \{v \in \mathbb{R}^4 : Tv = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^4 : Av = 0\} = N(A)$. נציב s, t במשתנים החופשיים בצורה המדורגת מסעיף הקודם ונקבל $x_3 = s, x_4 = t$

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} s-t \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן הבסיס הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ והמימד הוא 2

iii. $T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ אינה חז"ע כי למשל $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin C(A)$ אינה על כי T

$Im(T)$

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .4$$

(א) נתחיל עם הפ"א: לצורך כך נחשב את הדטר' של $\lambda I - A$

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \right| &= \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= \lambda^2 \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \lambda^2 [(\lambda-1) - 2] = \lambda^2 [\lambda - 3] \end{aligned}$$

ולכן הע"ע הם $\lambda_1 = 0$ ו $\lambda_2 = 3$. נחשב וע"ע: עבור $\lambda_1 = 0$ צריך לחשב את מרחב האפס של A . אחרי דירוג נקבל כי

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן המרחב העצמי הוא

$$V_{\lambda=0} = N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $\lambda_2 = 3$ נקבל

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=3} = N(A - 3I) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נפעיל גרם שמידט על הבסיס $\{v_1, v_2\}$ כדי למצוא בסיס או"נ ל $V_{\lambda=0}$

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ננרמל אותם ונקבל מסיס או"נ ל $V_{\lambda=0}$

$$\left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ננרמל את v_3 לקבל בסיס או"נ ל $V_{\lambda=3}$

$$\left\{ u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נגדיר $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. נגדיר $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ (הו"ע כעמודות) ונקבל ש P או"נ ונקבל:

$$P^t A P = D$$

(ב) לא, יש לה ע"ע 0. נוכל להגידר B למשל להיות

$$B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_1 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

ואז

$$AB = \begin{pmatrix} | & | & | \\ Au_1 & Au_2 & Au_1 \\ | & | & | \end{pmatrix} = 0$$

(ג) כיוון ש A סימטרית נקבל כי $R(A) = C(A)$ ואז

$$C(A)^\perp = R(A)^\perp = N(A) = \text{span} \{v_1, v_2\}$$

.5

(א) נכון כי במטריצה B

- ניתן לאפס את שורה 4 בעזרת שורה 1
- ניתן לאפס את שורה 5 בעזרת שורה 2
- ניתן לאפס את שורה 6 בעזרת שורה 3

ולקבל אחרי דירוג $B \rightarrow \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ ואז

$$\text{rank}(B) = \text{rank}\left(\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \text{rank}(A)$$

(ב) לא נכון למשל $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מדרגה 1 ואילו

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מדרגה 2

(ג) אותה דוגמא מסעיף קודם

(ד) לא נכון. מסעיף א נקבל כי $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ ולכן אם סעיף זה נכון צריך להתקיים $\text{rank}(C) > \text{rank}(A)$. למטריצה C יש 3 עמודות ולכן $\text{rank}(C) \leq 3$ ולכן אם סעיף זה נכון צריך להתקיים כי $\text{rank}(A) = 1$ ו $\text{rank}(C) = 3$. כלומר אחרי דירוג

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

ע"י אותם פעולות נקבל כי

$$C \rightarrow \begin{pmatrix} A' \\ A^t \end{pmatrix}$$

כיוון שכך נקבל שב A^t יש 2 שורות בת"ל לפחות ולכן $\text{rank}(A^t) = \text{rank}(A) \leq 2$ סתירה.

.6

(א) מחישוב ישיר

$$p_{\alpha A}(x) = |\lambda - \alpha A| = \left| \alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha} - A \right) \right| = \alpha^n \left| \frac{\lambda}{\alpha} - A \right| = \alpha^n p_A\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$$

(ב) אם $c = 0$ אזי $P^{-1}AP = 0$ ואז $A = 0$ ואז $A^n = 0$ וסיימנו. אחרת $c \neq 0$. כיוון ש A דומה ל cA יש להם אותו פולינום אופייני וביחד עם סעיף קודם נקבל

$$p_A(x) = p_{cA}(x) = c^n p_A\left(\frac{x}{c}\right)$$

נסמן $p_A(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ כאשר $\alpha_n = 1$ (כי פ"א הוא פולינום מתוקן) ונקבל כי

$$p_A(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i = c^n \sum_{i=0}^n \alpha_i \left(\frac{x}{c}\right)^i = c^n p_A\left(\frac{x}{c}\right)$$

משויוון זה נקבל כי לכל $0 \leq i \leq n$ מתקיים כי

$$\alpha_i = c^n \frac{\alpha_i}{c^i} = c^{n-i} \alpha_i$$

כעת אם קיים $0 \leq i \leq n-1$ כך ש $\alpha_i \neq 0$ נקבל ע"י חילוק ב α_i כי $c^{n-i} = 1$ וסיימנו. אחרת לכל $0 \leq i \leq n-1$ מתקיים כי $\alpha_i = 0$ ואז $p_A(x) = x^n$. ממשפט קיילי המילטון נקבל

$$0 = p_A(A) = A^n$$

וסיימנו.