סמסטר א' (מועד ב'), תשע"ז

1. תהי Aמטריצה ריבועית מרוכבת

(א) הוכיחו של-A ול-A^t אותם ע"ע.

פתרון. נחשב את הפלינום האופייני

$$\begin{aligned} p_{A^t}(\lambda) &= \left|\lambda I - A^t\right| = \\ &= \left|\lambda I^t - A^t\right| = \\ &= \left|\lambda I - A\right| = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

יש להם אותו פולינום אופייני ולכן אותם ע"ע

(ב) הניחו שסכום איברי כל עמודה של A הוא 5777. הוכיחו ש-5777 הוא ע"ע של A.

פתרון. ראשית נראה שלמטריצה $B = A^t$ יש עע 5777 על ידי זה שנראה ש- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע לע"ע הדרוש

$$\left[B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right]_i = \left[\begin{pmatrix} - & R_1(B) & - \\ - & R_2(B) & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(B) & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right]_i = \sum_j \left[R_i(B)\right]_j = 5777$$

לכן

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 5777\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר 5777הוא עע של $B = A^t$ ולפי סעיף קודם הוא עע של A.

(ג) הניחו של-A יש ערך עצמי λ המקיים $|\lambda| > 1$ הראו שלכל n טבעי $A^n \neq I$.

פתרון. . נניח בשלילה שקיים n כך ש-

$$A^n = I$$

. כידוע אם λ הוא עע של Aאז λ^n הוא הע"ע של A^n (בבחינה יש להוכיח) לכן אם $|\lambda| > 1$אז גם $|\lambda^n| > 1$בסתירה לזה שכל הע"ע של A^n הם 1

2. תהי $A=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times4}$ ויהי Uמרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ ו-$W=U^{\perp}$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^4$

(א) הוכיחו שלכל $u\in U,w\in W$ מתקיים $\|u+w\|=\|u-w\|$.

פתרון. זה נכון עבור שני כל מרחב ובמרחב הניצב שלו

$$\|u-w\|=\langle u-w,u-w\rangle=\langle u,u\rangle+\langle w,w\rangle$$

בעוד ש-

$$\|u+w\|=\langle u+w,u+w\rangle=\langle u,u\rangle+\langle w,w\rangle$$

(ב) מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U ובסיס אורתונורמלי ל- W.

פתרון. זה נכון עבור שני כל מרחב ובמרחב הניצב שלו

$$\|u-w\|=\langle u-w,u-w\rangle=\langle u,u\rangle+\langle w,w\rangle$$

בעוד ש-

$$\|u+w\|=\langle u+w,u+w\rangle=\langle u,u\rangle+\langle w,w\rangle$$

ראשית נמצא בסיס ל-Uו-Wואז נעשה גרם שמידט :

$$U=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\begin{cases}x+w=0\\-x+y=0\end{cases}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

כעת נבצע גרם שמידט על הבסיסים

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\to\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ו-

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\sqrt{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

כלומר $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\sqrt{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס אותונורמלי ל-U

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

ו-

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{0}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\to\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

לכן $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס אורתונורמלי ל-$U^{\perp}$

(ג) יהי $v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ מצאו $u\in U,w\in W$ כך ש- $v=u+w$

פתרון. נשים שלב ש-

$$v=\pi_W\left(v\right)+v-\pi_W\left(v\right)$$

מכאן

$$\pi_W\left(v\right)=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cdots\right.$$

כלומר

$$v=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\0\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

3. יהי $V=\mathbb{R}_2\left[x\right]$ נגדיר העתקה $T\left(p\left(x\right)\right)=p\left(x\right)+p\left(x+1\right)$

(א) הראו כי T היא ה"ל והציגו אותה לפי בסיס של V כרצונכם

פתרון. נאכן מתקיים

$$T\left(p\left(x\right)+aq\left(x\right)\right)=p\left(x\right)+aq\left(x\right)+p\left(x+1\right)+aq\left(x+1\right)=T\left(p\left(x\right)\right)+aT\left(q\left(x\right)\right)$$

מטריצה מייצגת:

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=a+bx+cx^2+a+b\left(x+1\right)+c\left(x+1\right)^2=2a+b+c+\left(2b+2c\right)x+2cx^2$$

לכן

$$\left[T\right]_S=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&2&2\end{pmatrix}$$

(ב) חשבו את הפולינום האופייני $f_T(x)$ ואת הפולינום המינימלי $m_T(x)$

פתרון. נאכן מתקיים

$$T(p(x)+aq(x)) = p(x)+aq(x)+p(x+1)+aq(x+1) = T(p(x))+aT(q(x))$$

מטריצה מייצגת:

$$T\left(a+bx+cx^2\right) = a+bx+cx^2+a+b(x+1)+c(x+1)^2 = 2a+b+c+(2b+2c)x+2cx^2$$

לכן

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

מכאן הפולינום האופייני הוא

$$p_T(x) = (x-2)^3$$

נמצא את הריבוי הגראומטרי של $\lambda = 2$ ונקבל

$$V_2 = N\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = Span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

לכן צורת הזורדן היא

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

לכן הפולינומים המינימלי הוא

$$m_A(x) = (x-2)^3$$

(ג) מצאו את צורת זורדן של T האם Tלכסינה?

פתרון. נעשה בסעיף הקודם

4. הוכח/הפרך:

(א) אם לשתי מטריצות מרוכבות מסדר 3×3 יש אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי אז הן דומות

פתרון. נכון, יש לעבור על כל האופציות של בלוקי זורדן

(ב) אם מטריצה לכסינה אז הריבוי האלגברי של כל עע שלה שווה ל-1

פתרון. לא נכון, ניקח את

$$A = I$$

(ג) אם הפולינום המינימלי של מטריצה ריבועית A הוא $m_A(x) = x^4$ אז $I-4A$ היא הפיכה

פתרון. נכון, נחפש מטריצה $B = aA^3 + bA^2 + cA + dI$ כך ש-$(I-4A)\,B = I$
ניקח את אז

$$\begin{aligned}(I-4A)\,B &= (I-4A)\,B =\\ &= (I-4A)\left(aA^3+bA^2+cA+dI\right) =\\ &= aA^3+bA^2+cA+dI-4aA^4-4bA^3-4cA^2-4dA =\\ &= (a-4b)\,A^3+(b-4c)\,A^2+(c-4d)\,A+dI\end{aligned}$$

מכאן

$$\begin{cases} d=1\\ c=4\\ b=4\\ a=16\end{cases}$$

כלומר

$$16A^3+4A^2+4A+I$$

היא ההופכית.

(ד) כל קבוצה אורתוגונלית שאינה מכילה את ווקטור ה-0 היא בת"ל

פתרון. נכון, הוכחנו בתרגול

$$0 = \langle 0, v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i, v_j\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\langle v_i, v_j\rangle = \alpha_j\,\langle v_j, v_j\rangle$$

$$\alpha_j = 0$$

(ה) הע"ע של מטריצה ממשית סימטרית ואורתוגונלית הם כולם ± 1

פתרון. נכון, הוכחנו בתרגול

$$\langle v, v\rangle = v^tA^tAv = (Av)^t\,Av = \langle Av, Av\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\lambda\langle v, v\rangle = \lambda^2\langle v, v\rangle$$

$$\lambda^2 = \pm 1$$

(ו) יהי V ממ"פ $dim\,(V) \geq 2$ ויהיו $u, v \in V$. אם $\|u\| = \|v\| = \|u+v\|$ אז $u = v = 0$

פתרון. לא נכון, ניקח את

$$u = \begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

אז האורכים היו $\|u\| = \|v\| = \|u+v\| = 1$