אביב תשע"ו

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 7: מכניקת הקוונטים:
מרחב הילברט, פונקצית דלתא של דיראק, אופרטורים

1. יהי H מרחב הילברט. הוכיחו:

   (א) אם $\{x_n\} \subset H$ סדרת קושי, אזי קיים $x \in H$ כך ש $\|x_n\| \to \|x\|$.

   (ב) אם $\{x_n\} \subset H$ סדרה, כאשר $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ מתכנס ב H.

2. הוכיחו: אם $[B,[A,B]]=0$ אז $[A,B^n] = nB^{n-1}[A,B]$.
(הדרכה: הגדירו $g_n = [A,B^n]$ והוכיחו באינדוקציה את הרקורסיה $g_n = Bg_{n-1} + g_1 B^{n-1}$. כעת רשמו את g_n כסכום $g_n = \sum_{k=0}^{n-1} B^k g_1 B^{n-k-1}$ והראו כי $g_n = nB^{n-1}g_1$ כאשר $[B,g_1]=0$).

3. הוכיחו כי לכל וקטור $|\varphi\rangle$ במרחב הילברט H מתקיים $\|U\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2$ ($\langle U\varphi|U\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle$) אם ורק אם U אופרטור יוניטרי. כלומר אופרטור U שומר על נורמה אם ורק אם $U^\dagger = U^{-1}$.
(הדרכה: על מנת להוכיח כי U יוניטרי התבוננו בוקטור $|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle$ כאשר $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in H$, ו λ סקלר מרוכב. בדקו את המכפלה הפנימית עבור $\lambda = 1$ ו $\lambda = i$ והסיקו כי U יוניטרי).

4. אוסילטור הרמוני קוונטי מתואר ע"י ההמילטוניאן $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$. השתמשו בתוצאה $\langle x|p^n|x'\rangle = (i\hbar)^n \delta(x-x') \frac{\partial^n}{\partial x'^n}$ ובתנאי $\langle\psi|H|\psi\rangle / \langle\psi|\psi\rangle = E$ על מנת לקבל את משוואת שרדינגר עבור אוסילטור הרמוני

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x). \qquad (1)$$

5. נתון אופרטור התלוי בזמן $A(t)$.

   (א) הוכיחו כי ההתפתחות בזמן של ערך התצפית של $A(t)$ נתונה ע"י

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = -\frac{i}{\hbar}\langle [A,H]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle \qquad (2)$$

(ב) השתמשו בתוצאת סעיף (א) כדי להוכיח את משפט ארנפסט המתאר את הקשר בין הדינמיקה של ערכי התוחלת של אופרטורי המקום והתנע $\frac{d}{dt}\langle \mathrm{x}\rangle = \langle p\rangle/m$, $\frac{d}{dt}\langle p\rangle = -\left\langle \frac{dV}{dx}\right\rangle$ עבור חלקיק בעל מסה m.

(ג) עבור אוסילטור הרמוני עם פוטנציאל $V(x) = m\omega^2 x^2/2$, הראו כי התוחלת של אופרטור המקום נעה על פי המשוואה הקלאסית $\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle = -\omega^2\langle x\rangle$

6. חלקיק מוגבל לנוע על ציר x בלבד (בעיה חד מימדית) תחת השפעת פוטנציאל כלשהוא $V(x)$.

(א) אופרטור הזוגיות $\hat{P}$ מוגדר כך שבמרחב x הפעולה שלו היא $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$. מצאו את הערכים העצמיים של $\hat{P}$.

(ב) הוכיחו כי אם $V(x) = V(-x)$ אז $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$, כאשר $\hat{H}$ הוא אופרטור האנרגיה של המערכת.

(ג) הוכיחו כי אם $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$ אז כל מצב עצמי קשור של האנרגיה הוא בעל זוגיות מוגדרת היטב, כלומר זוגי ($\psi(x) = \psi(-x)$) או אי זוגי ($-\psi(x) = \psi(-x)$).