אביב תשע"ה

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 7: מבוא לתורת הקוונטים:
מרחב הילברט, פונקצית דלתא של דיראק, אופרטורים

1. יהי H מרחב הילברט. הוכיחו:

(א) אם $\{x_n\} \subset H$ סדרת קושי, אזי קיים $x \in H$ כך ש $\|x_n\| \to \|x\|$.

(ב) אם $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, כאשר $\{x_n\} \subset H$ סדרה, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ מתכנס ב H.

2. הראו כי הפונקציות הבאות הינן פונקציות דלתא (בגבול $\epsilon \to 0$).

(א) $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\epsilon^2}$, $-\infty \le x \le \infty$

(ב) $f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\epsilon^2}\sqrt{\epsilon^2 - x^2} & |x| \le \epsilon \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(רמז : השתמשו בפונקצית מבחן $g \in C^\infty(-\infty, \infty)$ עם תומך קומפקטי על מנת להראות כי $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) g(x) dx = g(0)$).

3. הוכיחו את התכונות הבאות של יחסי חילוף

(א) אנטי סימטריות $[A, B] = -[B, A]$

(ב) $[A, f(A)] = 0$

(ג) $[A, Const] = 0$

(ד) לינאריות $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$

(ה) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

(ו) זהות יעקובי $[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$

(ז) אם $[B, [A, B]] = 0$ אז $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$

(הגדירו $g_n = [A, B^n]$ והוכיחו באינדוקציה את הרקורסיה $g_n = Bg_{n-1} + g_1 B^{n-1}$. כעת רשמו את g_n כסכום $g_n = \sum_{k=0}^{n-1} B^k g_1 B^{n-k-1}$ והראו כי $g_n = nB^{n-1} g_1$ כאשר $[B, g_1] = 0$).

4. הוכיחו כי לכל וקטור $|\varphi\rangle$ במרחב הילברט H מתקיים $\|U\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2$ ($\langle U\varphi|U\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle$) אם ורק אם U אופרטור יוניטרי. כלומר אופרטור U שומר על נורמה אם ורק אם $U^\dagger = U^{-1}$.
(הדרכה: על מנת להוכיח כי U יוניטרי התבוננו בוקטור $|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle$ כאשר $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in E_H$, ו λ סקלר מרוכב. בדקו את המכפלה הפנימית עבור $\lambda = 1$ ו $\lambda = i$ והסיקו כי U יוניטרי).

5. נתון אופרטור התלוי בזמן $A(t)$.

(א) הוכיחו כי ההתפתחות בזמן של ערך התצפית של $A(t)$ נתונה ע"י

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = -\frac{i}{\hbar}\langle[A,H]\rangle + \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle$$

(ב) השתמשו בתוצאת סעיף (א) כדי להוכיח את משפט ארנפסט המתאר את הקשר בין הדינמיקה של ערכי התוחלת של אופרטורי המקום והתנע $\frac{d}{dt}\langle \mathrm{x}\rangle = \langle p\rangle/m$, $\frac{d}{dt}\langle p\rangle = -\left\langle\frac{dV}{dx}\right\rangle$ עבור חלקיק בעל מסה m.

(ג) עבור אוסילטור הרמוני עם פוטנציאל $V(x) = m\omega^2x^2/2$, הראו כי התוחלת של אופרטור המקום נעה על פי המשוואה הקלאסית $\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle = -\omega^2\langle x\rangle$

6. חלקיק מוגבל לנוע על ציר x בלבד (בעיה חד מימדית) תחת השפעת פוט-נציאל כלשהוא $V(x)$.

(א) עבור חלקיק קשור, כמה מצבים עצמיים בלתי תלויים לינארית קי-ימים עבור אנרגיה נתונה E?

(ב) אופרטור הזוגיות $\hat{P}$ מוגדר כך שבמרחב x הפעולה שלו היא $\hat{P}x = -x$. מצאו את הערכים העצמיים של $\hat{P}$.

(ג) הוכיחו כי אם $V(x) = V(-x)$ אז $[\hat{H},\hat{P}] = 0$, כאשר $\hat{H}$ הוא אופרטור האנרגיה של המערכת.

(ד) הוכיחו כי אם $[\hat{H},\hat{P}] = 0$ אז כל מצב עצמי קשור של האנרגיה הוא בעל זוגיות מוגדרת היטב, כלומר זוגי ($\psi(x) = \psi(-x)$) או אי זוגי ($-\psi(x) = \psi(-x)$).