פתרון מבחן מועד ג – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 31/05/18

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(5x^3\right)e^{x^2-1}}{\left(1-\cos\left(x\right)\right)^3}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin(5x^3)}{5x^3}}_{\to 1}\right)^2\cdot\underbrace{e^{x^2-1}}_{\to e^{-1}}\cdot\left(\underbrace{\frac{x^2}{1-\cos(x)}}_{\to 2}\right)^3\cdot 25=1^2\cdot e^{-1}\cdot 2^3\cdot 25=\frac{200}{e}$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\ln(x)\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}\left(1-\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right)=\{\infty(1-0\cdot 1)\}=\infty$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n!}}{n!}$

ידוע לפי סדרי גודל כי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$$

נציב לפי היינה את הסדרה $a_n=n!\to\infty$ בפונקציה ונקבל כי

$$\frac{e^{n!}}{n!}\to\infty$$

2.

א. חשבו את $\int\frac{1}{\arctan(x)+x^2\cdot\arctan(x)}dx$.

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty\frac{x+1}{x^3-1}dx$.

3. הוכיחו כי לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ קיים פתרון יחיד למשוואה $\ln\left(e^x+1\right)=a$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = \ln(e^x + 1) - a$$

$$h'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0$$

לכן הפונקציה עולה בכל הממשיים, ולכן אם קיים שורש הוא יחיד.

כעת

$$\lim_{x\to\infty} \ln(e^x + 1) - a = \infty$$

ולכן קיימת נקודה x_2 כך ש $h(x_2) > 0$

כמו כן

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(e^x + 1) - a = -a < 0$$

כלומר קיימת נקודה x_1 כך ש $h(x_1) < 0$

כיוון שהפונקציה רציפה כצירוף רציפות, לפי ערך הביניים הוא חותכת את הציר בין x_1, x_2 ולכן יש פתרון ולפי ההוכחה למעלה הוא יחיד.

4. תהי פונקציה f גזירה ב $\mathbb{R}$, כך ש $f(f(x)) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

פתרון מלא לגרסא מאתגרת יותר של השאלה נמצא בחוברת בקישור הבא, שאלות 44-45.

א. הוכיחו שקיימת נקודה עבורה $f'(x)=0$ או קיימת נקודה עבורה $f'(x)=1$.

נגזור את שני הצדדים

$$f'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = f'(x)$$

$$f'(x)\Big(f'\big(f(x)\big) - 1\Big) = 0$$

אם קיימת נקודה c עבורה $f'(c) = 0$ סיימנו.

אחרת, לכל c מתקיים כי $f'(c) \neq 0$.

נציב למשל $c = 0$ ונקבל

$$f'(0)\Big(f'\big(f(0)\big) - 1\Big) = 0$$

מותר לחלק ב$f'(0)$ כי תמיד הנגזרת שונה מאפס במקרה זה ונקבל כי

$$f'\big(f(0)\big) = 1$$

ואז אכן בנקודה $x = f(0)$ מתקיים כי $f'(x) = 1$

ב.   הוכיחו שאם $f(0)\neq 0$ קיימת נקודה עבורה $f'(x)=0$.

$$f\big(f(0)\big)=f(0)$$

כיוון ש $f(0)\neq 0$ וערך הפונקציה f שווה בשתי הנקודות הללו.

ולכן לפי משפט רול, כיוון ש f רציפה בקטע הסגור וגזירה בפתוח (כי היא היא גזירה תמיד) נובע כי קיימת נקודה בה $f'(x)=0$.

5.   נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{n}+a_n+n$.

נוסח העשרה לשאלה: הוכיחו כי הסדרה חיובית החל משלב מסויים.

א.   הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^2}{n}+n\geq 0$$

ב.   חשבו את $\lim_{n\to\infty}a_n$.

<u>אם</u> הסדרה חסומה, כיוון שהיא עולה היא מתכנסת לגבול סופי נסמנו $a_n\to L$

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1}=\lim\frac{a_n^2}{n}+a_n+n$$

$$\lim\frac{a_n^2}{n}+a_n+n=\left\{\frac{L^2}{\infty}+L+\infty\right\}=\infty$$

ולכן

$$L=\infty$$

סתירה.

לכן הסדרה אינה חסומה ומתקיים כי $a_n\to\infty$ כי היא עולה.

6.

א.   חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{k^3}{k^2+3nk+2n^2}\right)$.

ב.   קרבו את $\sqrt{8}$ באמצעות הפונקציה $f(x)=\sqrt{9+x}$ עד כדי $h=\frac{1}{100}$.