חורף תשע"ד

# פונקציות מרוכבות למהנדסים

## תרגיל כיתה 13: שארית (Residue)

1. הוכיחו:

(א) אם פונקציה $f(z)$ זוגית אזי $\operatorname{res}(f,z_0)=-\operatorname{res}(f,-z_0)$
נרשום את $f(z)$ כטור לורן סביב $z_0$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+...=f(-z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n(z+z_0)^n+\frac{-c_{-1}}{z+z_0}+...$$

ומיחידות טור לורן נקבל כי $b_n=(-1)^n c_n$ מקדמי טור לורן של $f(z)$ בסביבת $-z_0$ ו $c_{-1}=\operatorname{res}(f,z_0)=-b_{-1}=-\operatorname{res}(f,-z_0)$

(ב) אם פונקציה $f(z)$ אי זוגית אזי $\operatorname{res}(f,z_0)=\operatorname{res}(f,-z_0)$
נרשום את $f(z)$ כטור לורן סביב $z_0$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+...=-f(-z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n(z+z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z+z_0}+...$$

ומיחידות טור לורן נקבל כי $b_n=(-1)^{n+1}c_n$ מקדמי טור לורן של $f(z)$ בסביבת $-z_0$ ו $c_{-1}=\operatorname{res}(f,z_0)=b_{-1}=\operatorname{res}(f,-z_0)$

2. משפט השארית (Residue)

תהי $f(z)$ אנליטית בתחום $D$ פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות $z_1,z_2,...,z_n$. אזי לכל קו סגור $\Gamma$ העוקף נקודות אלו ונמצא ב $D$ מתקיים

$$\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}(f,z_k).$$

(א) תהיינה $\varphi(z),\psi(z)$ אנליטיות בסביבת $z_0$ ו $\psi(z_0)=0,\psi'(z_0)\neq 0,\varphi(z_0)\neq 0$.
הראו כי $z_0$ קוטב פשוט של $f=\varphi/\psi$.
נרשום

$$f=\frac{\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)+...}{\psi(z_0)+\psi'(z_0)(z-z_0)+...}=$$

$$= \frac{1}{z-z_0}\frac{\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)+...}{\psi'(z_0)+\frac{1}{2!}\psi''(z_0)(z-z_0)+...} = \frac{\phi(z)}{z-z_0}$$

כאשר

$$\phi(z) = \frac{\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)+...}{\psi'(z_0)+\frac{1}{2!}\psi''(z_0)(z-z_0)+...}$$

אנליטית בסביבת $z_0$.

(ב) חשבו $\mathrm{res}(f,z_0)$

$$\mathrm{res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\varphi}{\psi} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\varphi'+\varphi}{\psi'} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

כאשר השתמשנו בכלל לופיטל לחישוב הגבול $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\varphi/\psi$.

(ג) חשבו את האינטגרל $\int_{|z|=5}\frac{z^2dz}{1+z^4}$.

נסמן $\varphi=z^2, \psi=1+z^4$.

אזי $\psi(z_k)=0, \psi'(z_k)=4z_k^3\neq 0, \varphi(z_k)=2z_k\neq 0$

כאשר $z_k = \mathrm{cis}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}),\ \ k=0,1,2,3$ האפסים של $\psi$ ומתקיים (בדקו!) $z_0=-z_2, z_1=-z_3$. המעגל $|z|=5$ עוקף את ארבעת האפסים של $\psi$ ולכן על פי משפט השארית וסעיף 2ב נקבל

$$\int_{|z|=5}\frac{z^2dz}{1+z^4} = 2\pi i\sum_{k=0}^{3}\mathrm{res}(f,z_k) = 2\pi i\sum_{k=0}^{3}\frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{\pi i}{2}\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{z_k} = 0.$$