

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 13: שארית (Residue)

1. הוכיחו:

(א) אם פונקציה $f(z)$ זוגית אזי $\text{res}(f, z_0) = -\text{res}(f, -z_0)$
 נרשום את $f(z)$ כטור לורן סביב z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \dots = f(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n (z+z_0)^n + \frac{-c_{-1}}{z+z_0} + \dots$$

ומיחידות טור לורן נקבל כי $b_n = (-1)^n c_n$ מקדמי טור לורן של $f(z)$
 בסביבת $-z_0$ ו $c_{-1} = \text{res}(f, z_0) = -b_{-1} = -\text{res}(f, -z_0)$

(ב) אם פונקציה $f(z)$ אי זוגית אזי $\text{res}(f, z_0) = \text{res}(f, -z_0)$
 נרשום שנית את $f(z)$ כטור לורן סביב z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \dots = -f(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n (z+z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z+z_0} + \dots$$

שוב, מיחידות טור לורן נקבל כי $b_n = (-1)^{n+1} c_n$ מקדמי טור לורן של $f(z)$
 בסביבת $-z_0$ ו $c_{-1} = \text{res}(f, z_0) = b_{-1} = \text{res}(f, -z_0)$

2. משפט השארית (Residue)

תהי $f(z)$ אנליטית בתחום D פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות z_1, z_2, \dots, z_n . אזי לכל קו סגור Γ העוקף נקודות אלו ונמצא ב D מתקיים

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f, z_k).$$

(א) תהינה $\varphi(z), \psi(z)$ אנליטיות בסביבת z_0 ו

$$\psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0, \varphi(z_0) \neq 0$$

הראו כי z_0 קוטב פשוט של $f = \varphi/\psi$.

נרשום

$$f = \frac{\varphi(z_0) + \varphi'(z_0)(z-z_0) + \dots}{\psi(z_0) + \psi'(z_0)(z-z_0) + \dots} =$$

$$= \frac{1}{z - z_0} \frac{\varphi(z_0) + \varphi'(z_0)(z - z_0) + \dots}{\psi'(z_0) + \frac{1}{2!}\psi''(z_0)(z - z_0) + \dots} = \frac{\phi(z)}{z - z_0}$$

כאשר

$$\phi(z) = \frac{\varphi(z_0) + \varphi'(z_0)(z - z_0) + \dots}{\psi'(z_0) + \frac{1}{2!}\psi''(z_0)(z - z_0) + \dots}$$

אנליטית בסביבת z_0 .

(ב) חשבו $\text{res}(f, z_0)$

$$\text{res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)\varphi}{\psi} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)\varphi' + \varphi}{\psi'} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

כאשר השתמשנו בכלל לופיטל לחישוב הגבול $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)\varphi/\psi$.

$$(ג) \text{ חשבו את האינטגרל } \int_{|z|=5} \frac{z^2 dz}{1+z^4}$$

$$\text{נסמן } \varphi = z^2, \psi = 1 + z^4$$

$$\text{אזי } \psi(z_k) = 0, \psi'(z_k) = 4z_k^3 \neq 0, \varphi(z_k) = 2z_k \neq 0$$

כאשר $z_k = \text{cis}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2})$, $k = 0, 1, 2, 3$ (בדקו!)
 $z_0 = -z_2, z_1 = -z_3$. המעגל $|z| = 5$ עוקף את ארבעת האפסים של ψ ולכן על פי משפט השארית וסעיף 2 נקבל

$$\int_{|z|=5} \frac{z^2 dz}{1+z^4} = 2\pi i \sum_{k=0}^3 \text{res}(f, z_k) = 2\pi i \sum_{k=0}^3 \frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{\pi i}{2} \sum_{k=0}^3 \frac{1}{z_k} = 0.$$