חורף תשע"ד

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 13: שארית (Residue)

1. הוכיחו:

(א) אם פונקציה $f(z)$ זוגית אזי $\mathrm{res}(f,z_0)=-\mathrm{res}(f,-z_0)$
נרשום את $f(z)$ כטור לורן סביב z_0

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+...=f(-z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n(z+z_0)^n+\frac{-c_{-1}}{z+z_0}+...$$

ומיחידות טור לורן נקבל כי $b_n=(-1)^n c_n$ מקדמי טור לורן של $f(z)$ בסביבת $-z_0$ ו $c_{-1}=\mathrm{res}(f,z_0)=-b_{-1}=-\mathrm{res}(f,-z_0)$

(ב) אם פונקציה $f(z)$ אי זוגית אזי $\mathrm{res}(f,z_0)=\mathrm{res}(f,-z_0)$
נרשום שנית את $f(z)$ כטור לורן סביב z_0

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+...=-f(-z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n(z+z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z+z_0}+...$$

ושוב, מיחידות טור לורן נקבל כי $b_n=(-1)^{n+1}c_n$ מקדמי טור לורן של $f(z)$ בסביבת $-z_0$ ו $c_{-1}=\mathrm{res}(f,z_0)=b_{-1}=\mathrm{res}(f,-z_0)$

2. משפט השארית (Residue)

תהי $f(z)$ אנליטית בתחום D פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות $z_1,z_2,...,z_n$. אזי לכל קו סגור Γ העוקף נקודות אלו ונמצא ב D מתקיים

$$\int_{\Gamma}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}(f,z_k).$$

(א) תהיינה $\varphi(z),\psi(z)$ אנליטיות בסביבת z_0 ו

i. $\psi(z_0)=0,\psi'(z_0)\neq 0,\varphi(z_0)\neq 0$.
הראו כי z_0 קוטב פשוט של $f=\varphi/\psi$.
נרשום

$$f=\frac{\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)+...}{\psi(z_0)+\psi'(z_0)(z-z_0)+...}=$$

$$= \frac{1}{z-z_0}\frac{\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)+...}{\psi'(z_0)+\frac{1}{2!}\psi''(z_0)(z-z_0)+...} = \frac{\phi(z)}{z-z_0}$$

כאשר

$$\phi(z) = \frac{\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)+...}{\psi'(z_0)+\frac{1}{2!}\psi''(z_0)(z-z_0)+...}$$

אנליטית בסביבת z_0.

ii. חשבו $\mathrm{res}(f,z_0)$

$$\mathrm{res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\varphi}{\psi} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\varphi'+\varphi}{\psi'} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

כאשר השתמשנו בכלל לופיטל לחישוב הגבול $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\varphi/\psi$.

iii. חשבו את האינטגרל $\int_{|z|=5}\frac{z^2dz}{1+z^4}$.

נסמן $\varphi = z^2, \psi = 1+z^4$.

אזי $\psi(z_k)=0, \psi'(z_k)=4z_k^3\neq 0, \varphi(z_k)=2z_k\neq 0$

כאשר $z_k = \mathrm{cis}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}),\ k=0,1,2,3$ האפסים של ψ ומתקיים (בדקו!) $z_0=-z_2, z_1=-z_3$. המעגל $|z|=5$ עוקף את ארבעת האפסים של ψ ולכן על פי משפט השארית וסעיף 2(א)ii נקבל

$$\int_{|z|=5}\frac{z^2dz}{1+z^4} = 2\pi i\sum_{k=0}^{3}\mathrm{res}(f,z_k) = 2\pi i\sum_{k=0}^{3}\frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{\pi i}{2}\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{z_k} = 0.$$