פתרון תרגיל 4 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

23 במרץ 2016

1. נשתמש בנוסחה: $L=\int_a^b \left\|\gamma'\left(t\right)\right\| dt$.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'\left(t\right)=\left(-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t\right)$$

ולכן:

$$L=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt=3a\cdot\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}dt=$$

לפי הזהות $\sin^2 t+\cos^2 t$. לפי הזהות $\sin 2t=2\cos t\sin t$ נקבל:

$$=\frac{3a}{2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin 2t\right| dt=$$

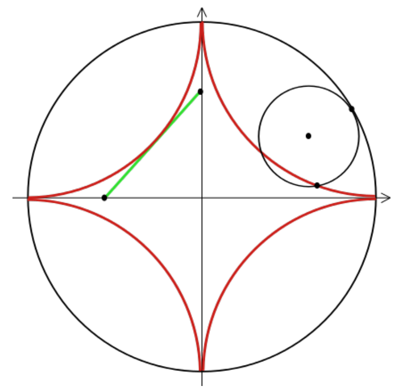
נחלק את האינטגרל לפי תחומי החיוביות והשליליות של $\sin 2t$:

$$=\frac{3a}{2}\cdot\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin 2tdt+\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin 2tdt+\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-\sin 2tdt\right)$$

כל אחד מהאינטגרלים שווה ל־1, ולכן:

$$L=\frac{3a}{2}\cdot 4=6a$$

עקומה זו נקראת **אסטרואידה.** אסטרואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) בתוך מעגל אחר בעל רדיוס גדול פי 4 מרדיוס המעגל הפנימי.



(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = (-2a\sin t - 2a\sin 2t, 2a\cos t - 2a\cos 2t)$$

לכן:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2\sin^2 t + 8a^2\sin t\sin 2t + 4a^2\sin^2 2t + 4a^2\cos^2 t - 8a^2\cos t\cos 2t + 4a^2\cos^2 2t}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{8a^2(1+\sin t\sin 2t - \cos t\cos 2t)}dt =$$

לפי הזהות $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. לפי זהויות לזווית כפולה:

$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 t\cos t - \cos t + 2\sin^2 t\cos t + 1}dt =$$

כעת, נציב $\sin^2 t = 1-\cos^2 t$ ונקבל:

$$2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{-4\cos^3 t + 3\cos t + 1}dt =$$

נשים לב שמתקיים: $-4\cos^3 t + 3\cos t + 1 = (1-\cos t)(2\cos t+1)^2$,
ולכן:

$$2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} |2\cos t + 1|\sqrt{1-\cos t}dt =$$

את האינטגרל אפשר לפתור באמצעות זהות לזווית כפולה:

$$\cos t = 1 - \sin^2 \frac{t}{2}$$

ונקבל את האינטגרל:

$$2\sqrt{2}a \int\limits_0^{2\pi} \left| (2\cos t + 1) \sin \frac{t}{2} \right| dt =$$

לפי זהות לזווית כפולה: $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - 1$, ולכן:

$$2\sqrt{2}a \int\limits_0^{2\pi} \left| \left(2\cos^2 \frac{t}{2} - 1 \right) \sin \frac{t}{2} \right| dt$$

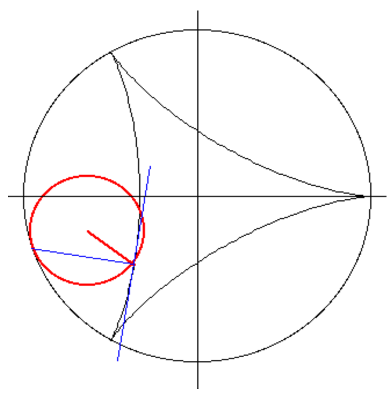
כאן, נציב $u = \cos \frac{t}{2}$ ונקבל $du = -\sin \frac{t}{2} dt$.

מכאן האינטגרל פשוט, ולאחר שחוזרים חזרה ל$-t$ הפתרון הוא $\frac{2}{3}\sqrt{1 - \cos 3t} \cot \left(\frac{3t}{2} \right)$.

בתחום שלנו, בכל אופן, נקבל:

$$L = 2\sqrt{2}a \cdot 4\sqrt{2} = 16a$$

עקומה זו נקראת **דלתואידה.** דלתואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) בתוך מעגל אחר בעל רדיוס גדול פי 3.



(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma' (t) = (a - a\cos t, a \sin t)$$

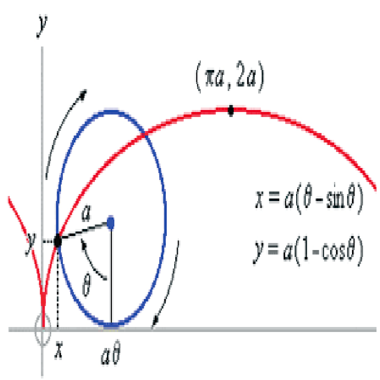
לכן:

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2a^2 (1 - \cos t)} dt$$

לפי הזהות $\sin^2 t+\cos^2 t=1$. לפי זהות לזווית כפולה: $1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$, ולכן:

$$=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a\cdot 2=8a$$

עקומה זו נקראת **ציקלואידה.** ציקלואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) על קו ישר.



(ד) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t)=(-2a\sin t+2a\sin 2t, 2a\cos t-2a\cos 2t)$$

לכן, בדומה לדלתואידה:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2 t-8a^2\sin t\sin 2t+4a^2\sin^2 2t+4a^2\cos^2 t-8a^2\cos t\cos 2t+4a^2\cos^2 2t}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{8a^2(1+\sin t\sin 2t-\cos t\cos 2t)}dt=$$

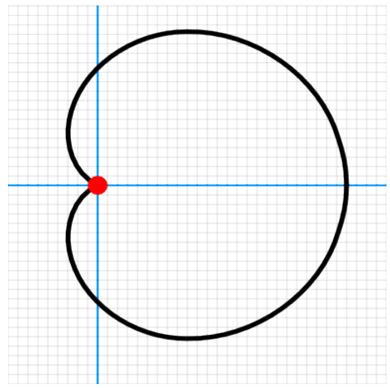
לפי זהויות של זווית כפולה:

$$=2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{-2\sin^2 t\cos t-\cos t+2\sin^2 t\cos t+1}dt=2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}=$$

בדומה לציקלואידה, האינטגרל הזה שווה ל-$4\sqrt{2}$, ולכן:

$$L=2\sqrt{2}a\cdot 4\sqrt{2}=16a$$

עקומה זו נקראת **קרדיואידה.** קרדיואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) סביב מעגל אחר בעל רדיוס זהה.



2. נשתמש בנוסחה ל$-s$ וננסה להפוך את הפונקציה שנקבל.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

ולכן:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(x)\|\,dx = \int_0^t \sqrt{4\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx = \int_0^t 2dx = 2t$$

לכן, הפרמטר הטבעי יהיה $t = \frac{s}{2}$, והפרמטריזציה הטבעית:

$$\gamma(s) = \left(1 + 2\cos\frac{t}{2}, -3 + 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = \left(1, t\sqrt{2+t^2}\right)$$

ולכן:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(x)\|\,dx = \int_0^t \sqrt{1 + x^2\left(2+x^2\right)}dx = \int_0^t \left(1+x^2\right)dx = \frac{t^3}{3}+t$$

עלינו למצוא את t כביטוי של s.

נתבונן במשוואה:

$$\frac{t^3}{3} + t - s = 0$$

ונפתור אותה באמצעות הנוסחה הכללית למשוואה ממעלה שלישית. הפתרון הממשי היחיד הוא:

$$t = \sqrt[3]{\frac{3s}{2} + \sqrt{1 + \frac{9s^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{3s}{2} - \sqrt{1 + \frac{9s^2}{4}}}$$

וזהו הפרמטר הטבעי. כדי למצוא את הפרמטריזציה הטבעית, נציב זאת ב־ $\gamma(t)$.

(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = \left(1, \sinh\frac{t}{a}\right)$$

ולכן:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(x)\|\, dx = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2\frac{x}{a}} dx = \int_0^t \cosh\frac{x}{a} dx = a \sinh\frac{t}{a}$$

לפי הזהות $1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$.

נחלץ את t ונקבל: $t(s) = a \cdot arcsinh\frac{s}{a}$. אם נציב זאת ב־ $\gamma(t)$, לאחר שנשתמש בזהויות של הפונקציות ההיפרבוליות נקבל:

$$\gamma(s) = \left(a \cdot arcsinh\frac{s}{a}, a\sqrt{a^2 + s^2}\right)$$

וזוהי הפרמטריזציה הטבעית.

3. אם ניתן, נשתמש בנוסחה לפרמטריזציה טבעית. אחרת, נשתמש בנוסחה הכללית.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

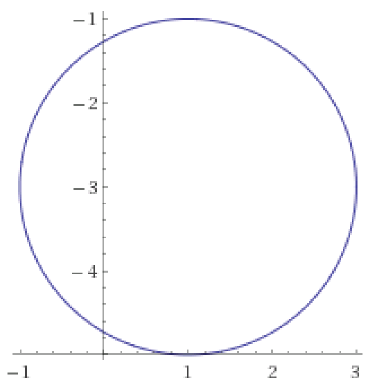
וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\gamma''(t) = (-2\cos t, -2\sin t)$$

ולכן העקמומיות היא:

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} -2\sin t & -2\cos t \\ 2\cos t & -2\sin t \end{vmatrix}}{\left(4\cos^2 t + 4\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

זהו מעגל שרדיוסו 2, ולכן הגיוני שעקמומיותו תהיה $\frac{1}{2}$.



(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t)=\left(1,\sinh\frac{t}{a}\right)$$

וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\gamma''(t)=\left(0,\frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}\right)$$

ולכן העקמומיות היא:

$$k(t)=\frac{\det(\gamma'(t),\gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ \sinh\frac{t}{a} & \frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}\end{vmatrix}}{\left(1+\sinh^2\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}}{\cosh^3\frac{t}{a}}=\frac{1}{a\cosh^2\frac{t}{a}}$$

(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(s)=\left(\cos\left(\phi\left(s\right)\right),\sin\left(\phi\left(s\right)\right)\right)$$

ולכן:

$$\|\gamma'(s)\|=\sqrt{\cos^2(\phi(s))+\sin^2(\phi(s))}=1$$

וזו אכן פרמטריזציה טבעית.

מכיוון שהפרמטריזציה טבעית, נוכל להשתמש בנוסחה: $k(s)=\|\gamma''(s)\|$.

וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\gamma''(s)=(-\sin(\phi(s))\cdot\phi'(s),\cos(\phi(s))\cdot\phi'(s))$$

ולכן:

$$k(s)=\sqrt{\left(-\sin(\phi(s))\cdot\phi'(s)\right)^2+\left(\cos(\phi(s))\cdot\phi'(s)\right)^2}=\phi'(s)$$

4. נתבונן בפונקציה $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$\phi\left(s\right)=\frac{s^5}{5}+\frac{s^4}{4}+\frac{s^3}{3}$$

לפי הסעיף האחרון בשאלה הקודמת, נקבל שעקמומיותה של העקומה:

$$\gamma\left(s\right)=\left(\int\limits_0^s\cos\left(\phi\left(u\right)\right)du,\int\limits_0^s\sin\left(\phi\left(u\right)\right)du\right)$$

היא $\phi'\left(s\right)$, כלומר $s^4+s^3+s^2$ כנדרש.