ב"א אלגברה לינארית תשעז מועד א

1. משפט מההרצאה.
2. משפטים מההרצאה.
3.

(א) מצאו מספר מרוכב z המקיים $z^2 = \bar{z}$.

פתרון: נסמן $z = a + bi$ עבור $a, b \in \mathbb{R}$ ממשיים. ונסתכל על המשוואה מהשאלה

$$(a+bi)^2 = \overline{a+bi}$$

או

$$a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$$

ונשווה את החלק הממשי והחלק המדומה (בנפרד) לקבל את שתי המשוואות

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = a \\ 2ab & = -b \end{cases}$$

ננסה $b = 0$ (כלומר z מספר ממשי..) ונקבל

$$\begin{cases} a^2 & = a \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

שקל לפתור $a = 1, 0$ וקיבלנו ש $z = 1$ ו $z = 0$ אכן פתרונות למשוואה.

(ב) מצאו לאילו ערכי k למערכת

$$\begin{cases} x - 3z & = -3 \\ 4x + 2ky - 2z & = -4 \\ z + 2y + kz & = 1 \end{cases}$$

יש:

- פתרון יחיד.
- אין סוף פתרונות.
- אין פתרון.

פתרון: נעביר את מערכת המשוואות לייצוג במטריצה ונדרג אותה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & 2k & -2 & -4 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2k & 10 & 8 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & 2k & 10 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-kR_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & 0 & 10-k^2-3k & 8-4k \end{array}\right)$$

וכעת:

אם $10-k^2-3k \neq 0$ נקבל שיש לנו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד. נטפל במקרה ש $10-k^2-3k=0$: נשים לב ש $k^2+3k-10=(k+5)(k-2)$ ולכן $10-k^2-3k=0$ אמ"מ $k=5$ או $k=2$.

- $k=2$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהיא בצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (z) ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

- $k=5$- נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

שיש בה שורת סתירה ולכן במקרה זה לא יהיה פתרון.

4. נתונה מהמטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(א) מצאו בסיס ומימד לתתי המרחבים: $C(A)\cap R(A)$ ו $N(A)$.

פתרון: נתחיל בדירוג המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכ

$$N(A) \overbrace{=}^{z=t\ \text{(המשתנה החופשי)}} \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \ \middle|\ t\in\mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל$N(A)$ ולכן $\dim N(A)=1$. בנוסף, השורות השונות מאפס בצורה מדורגת מהוות בסיס ל $R(A)$ ולכן

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל $R(A)$ ו $\dim R(A)=2$. ולסיום עמודות במטריצה A שיש בהם איברים פותחים בצורה מדורגת - מהוות בסיס

ל$C(A)$ ולכן (כיוון שיש איברים פותחים בעמודות 1 ו 2 בצורה מדורגת)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל $C(A)$ ו $\dim C(A) = 2$. כעת נמיר את $C(A), R(A)$ לייצוג כפתרון למערכת משוואות כך: עבור $R(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & z+x \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+x-y \end{array} \right)$$

ולכן

$$R(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z-x-y=0 \right\}$$

ועבור $C(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & z+x \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+x-2y \end{array} \right)$$

ולכן

$$C(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z+x-2y=0 \right\}$$

וכעת

$$C(A) \cap R(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c} z+x-y=0 \\ z+x-2y=0 \end{array} \right\}$$

נפתור את המערכת בעזרת ייצוג מטריצי

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$C(A) \cap R(A) = N\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right) \overbrace{=}^{z=t \text{ (המשתנה החופשי)}} \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ בסיס ל $C(A) \cap R(A)$ ומתקיים $\dim\left[C(A) \cap R(A)\right] = 1$.

(ב) הסבירו **לפי סעיף א**: האם A הפיכה?

פתרון: לא, כי $\text{rank}A=2$ (מימד מרחב השורות) ולכן $\text{rank}A\neq 3$ ולכן A אינה הפיכה.

(ג) מצאו את מיהו המרחב הניצב $\left(\text{span}\left\{N(A),C(A)\cap R(A)\right\}\right)^{\perp}$.
פתרון: מתקיים כי

$$\text{span}\left\{N(A),C(A)\cap R(A)\right\}=\text{span}\left\{N(A)\right\}+\text{span}\left\{C(A)\cap R(A)\right\}=N(A)+\left[C(A)\cap R(A)\right]=$$

$$=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}+\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$\left(\text{span}\left\{N(A),C(A)\cap R(A)\right\}\right)^{\perp}=\left(\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp}=\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp}$$

ואפשר למצוא אותו על ידי מציאת מרחב האפס של המטריצה הבאה (שכבר נמשיך לדרג אותה)

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+R_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp}\underbrace{=}_{z=t\ \text{(המשתנה החופשי)}}\left\{\begin{pmatrix}t\\2t\\t\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ו $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס למרחב הניצב ומימדו שווה 1.

5. יהא $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.

(א) הוכיחו כי לכל וקטור $v\in V$ קיימת הצגה יחידה $v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$ (ז"א שיש ויש רק אופציה אחת לבחור את הסקלרים $\alpha_1,\ldots\alpha_n$ מהשדה).
פתרון: יהא $v\in V$. כיוון ש B בסיס הוא בפרט פורש את V, כלומר $V=\text{span}B$ ולכן קיימים סקלרים $\alpha_1,\ldots\alpha_n$ כך ש $v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$. נראה שהם יחידים: נניח שקיימים $\beta_1,\ldots,\beta_n$ כך ש

$$v=\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n$$

ונראה כי $\alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_n=\beta_n$ (זה מראה על יחידות הסקלרים). אכן, כיוון ששני הצירופים שווים ל v נקבל ש

$$\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$$

ונעביר אגף ונוציא גורם משותף לקבל

$$(\alpha_1-\beta_1)\,v_1+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)\,v_n=0$$

ומכיון ש B בסיס ובפרט בת"ל נקבל שכל מקדמי הצירוף הנ"ל שווים אפס, כלומר

$$(\alpha_1-\beta_1)=0,\ldots,(\alpha_n-\beta_n)=0$$

נעביר אגף ונקבל

$$\alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_n=\beta_n$$

כפי שרצינו.

(ב) תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה. הוכיחו שגם $Av_1,\ldots,Av_n$ הוא בסיס של V.
פתרון: נוכיח ישירות לפי הגדרה ש $Av_1,\ldots,Av_n$ הוא בסיס של V:

- בת"ל: נניח צירוף לינארי שלהם שמתאפס, $\alpha_1Av_1+\cdots+\alpha_nAv_n=0$, ונראה שכל המקדמים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ שווים אפס. אכן, כיוון שיש פילוג, נקבל ש

$$A(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n)=\alpha_1Av_1+\cdots+\alpha_nAv_n=0$$

ומכיוון ש A הפיכה, נוכל לכפול ב A^{-1} משמאל לקבל

$$\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n=A^{-1}0=0$$

ומכיוון ש $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל וקיבלנו צירוף לינארי שלהם שמתאפס נסיק כי המקדמים שלו, שהם $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, כולם שווים אפס כפי שרצינו.

- פורשת את V: יהא $v\in V$ ונראה שקיימים מקדמים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ כך ש $v=\alpha_1Av_1+\cdots+\alpha_nAv_n$. אכן, כיוון ש $v_1,\ldots,v_n$ פורשים את v נקבל שקיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ כך ש

$$\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n=A^{-1}v$$

(כן, גם $A^{-1}v$ הוא וקטור). נכפול את השיוויון הנל ב A ונשתמש בפילוג לקבל ש

$$\alpha_1Av_1+\cdots+\alpha_nAv_n=A(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n)=A\left(A^{-1}v\right)=v$$

כפי שרצינו.