

פיסיקה למתמטיקאים

החוק השני של ניוטון

1. על חלקיק בעל מסה m פועל כח הפרופורציוני למהירות $F(v) = -bv^2$. ב $t = 0$ החלקיק נמצא בראשית ומהירותו ההתחלתית v_0 . מצאו את מיקומו כפונקציה של הזמן.

מאינטגרציה על משוואת התנועה $m\ddot{x} = m\dot{v} = -bv$, $v(0) = v_0$ נקבל

$$(1) \quad v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{bv_0}{m}t},$$

ומאינטגרציה על (1) נקבל

$$(2) \quad x(t) = \frac{m}{b} \ln \left(1 + \frac{bv_0}{m}t \right).$$

2. חלקיק בעל מסה m ומטען q נע באזור בו פועלים שדות מגנטי וחשמלי אחידים וקבועים בכיוון \hat{z} , $\vec{B} = B\hat{z}$, $\vec{E} = E\hat{z}$. בהתאמה.

(א) רשמו את משוואות התנועה

על החלקיק פועל כח לורנץ $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$. משוואות התנועה תיכתבנה אפוא וקטורית בצורה $m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$, וברכיבים:

$$m\dot{v}_x = qBv_y, \quad (3)$$

$$m\dot{v}_y = -qBv_x, \quad (4)$$

$$m\dot{v}_z = qE. \quad (5)$$

(ב) מצאו את המהירות בהינתן ש $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ נסמן $\omega = qB/m$ ונקבל

$$v_x = v_0 \cos \omega t, \quad (6)$$

$$v_y = -v_0 \sin \omega t, \quad (7)$$

$$v_z = \frac{qE}{m}t. \quad (8)$$

(ג) מצאו את המיקום בהינתן שהתנועה מתחילה בראשית מאינטגרציה על המשוואות ב (2) נקבל

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (9)$$

$$y = \frac{v_0}{\omega} (\cos \omega t - 1), \quad (10)$$

$$z = \frac{qE}{2m} t^2. \quad (11)$$

המסלול הינו בורג בעל חתך מעגלי $(\frac{v_0}{\omega})^2 = x^2 + (y + \frac{v_0}{\omega})^2$ כמתואר בשרטוט.

(ד) כמה סיבובים יבצע החלקיק עד לגובה h ?

נסמן ב t_h את הרגע בו החלקיק בגובה h . עד לנקודה זו, יבצע לכל הפחות n סיבובים. כלומר $nT \leq t_h \leq (n+1)T$ כאשר $T = 2\pi/\omega$ זמן המחזור. על כן מספר הסיבובים הינו $n_c = [t_h/T] = [\frac{B}{\pi} \sqrt{qh/2mE}]$. נשים לב כי מספר הסיבובים עולה עם השדה המגנטי B (התדירות הזוויתית) ויורד עם השדה החשמלי E (התאוצה בכיוון \hat{z}).

