

תרגיל בית 2 אינפי 3

1. תהינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ שתי קבוצות קשירות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $A \cup B$ קשירה.

פתרון. נבחר $A = B((0, 0), 1)$ ו $B = B((100, 100), 1)$ ניתן להגדיר שתי קבוצות פתוחות (נניח $B((0, 0), 2)$ ו $B((100, 100), 2)$ שהן זרות וביחד מכילות את $A \cup B$.

(ב) $A \cap B$ קשירה.

פתרון. המלבנים

$$[0, 3] \times [0, 1], \quad [2, 3] \times [0, 3]$$

הם קבוצות קשירות. החיתוך שלהם לא ריק $(2, 0)$ נמצא שם ולכן

$$[2, 3] \times [0, 3] \cup [0, 3] \times [0, 1]$$

היא קבוצה קשירה.

בדומה, המלבנים

$$[0, 1] \times [0, 3], \quad [0, 3] \times [2, 3]$$

הם קבוצות קשירות. החיתוך שלהם לא ריק $(0, 2)$ נמצא שם ולכן

$$[0, 1] \times [0, 3] \cup [0, 3] \times [2, 3]$$

היא קבוצה קשירה. החיתוך של שתי קבוצות קשירות אלה הוא

$$([2, 3] \times [0, 3] \cup [0, 3] \times [0, 1]) \cap ([0, 1] \times [0, 3] \cup [0, 3] \times [2, 3]) = [0, 1] \times [0, 1] \cup [2, 3] \times [2, 3]$$

וזאת לא קבוצה קשירה כי נוכל לקחת את הקבוצות

$$(-0.1, 1.1) \times (-0.1, 1.1) \quad (1.9, 3.1) \times (1.9, 3.1)$$

שהן קבוצות פתוחות וזרות וכל הקבוצה מוכלת בהן.

(ג) $A \setminus B$ קשירה.

פתרון. נבחר את

$$A = [0, 3] \times [0, 1] \quad B = [1, 2] \times [0, 1]$$

ואז נקבל ש

$$A \setminus B = [0, 1) \times [0, 1] \cup (2, 3] \times [0, 1]$$

שזאת קבוצה לא קשירה כי היא מוכלת בקבוצות הפתוחות והזרות

$$(-0.1, 1) \times (-0.1, 1.1), \quad (2, 3.1) \times (-0.1, 1.1)$$

הערה: מותר להשתמש בכך שהמרחב \mathbb{R}^n , כדורים ותאים הם קבוצות קשירות.

2. תהינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ שתי קבוצות קומפקטיות, ותהינה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצה של קבוצות

קומפקטיות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $A \cup B$ קומפקטית.

פתרון. נכון. אם A, B קומפקטיות אז שתיהן סגורות וחסומות. איחוד (של מספר סופי) של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה ולכן $A \cup B$ סגורה. בנוסף, איחוד קבוצות חסומות הוא חסום כי אם A מוכלת בכדור $B(0, r_A)$ ו B מוכלת בכדור $B(0, r_B)$ אז $A \cup B$ מוכלת בכדור $B(0, \max\{r_A, r_B\})$. ולכן $A \cup B$ סגורה וחסומה ולכן קומפקטית.

(ב) $A \cap B$ קומפקטית.

פתרון. נכון. בדומה ל א'. חיתוך קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה. חיתוך קבוצות חסומות היא קבוצה חסומה (כי אם A מוכל ב $B(0, r_A)$ אז גם $A \cap B$ מוכל שם). ולכן $A \cap B$ סגורה וחסומה ולכן קומפקטית.

(ג) $A \setminus B$ קומפקטית.

פתרון. לא נכון. נבחר $A = [0, 2]$ ו $B = [0, 1]$ אז $A \setminus B = (1, 2]$ שזאת לא קבוצה סגורה ולכן לא קומפקטית.

(ד) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ קומפקטית.

פתרון. לא נכון. נבחר $A_n = \{n\}$ ואז $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$ שזאת קבוצה לא חסומה ולכן לא קומפקטית.

3. אם $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ שתי קבוצות. נגדיר $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם A, B חסומות אז $A + B$ חסומה.

פתרון. נכון. אם A נמצאת בכדור $B(0, r_A)$ ו B נמצאת בכדור $B(0, r_B)$ אז נגדיר $r = r_A + r_B$ ואז יתקיים שאם $x \in A + B$

$$\|x\| = \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \leq r_A + r_B = r$$

ולכן $x \in B(0, r)$ כלומר $A + B \subseteq B(0, r)$. לכן $A + B$ חסומה.

(ב) אם A, B פתוחות אז $A + B$ פתוחה.

פתרון. נכון. נוכיח דבר יותר חזק שיוכיח גם את ד. נראה שאם A פתוחה ו B קבוצה כלשהיא אז $A + B$ פתוחה. נשים לב ש

$$A + B = \bigcup_{b \in B} A + \{b\}$$

ולכן מספיק להוכיח ש $A + \{b\}$ היא קבוצה פתוחה, כי איחוד של קבוצות פתוחות היא קבוצה פתוחה. ניקח

$$x \in A + \{b\}$$

כלומר

$$x = a + b$$

כאשר $a \in A$. בגלל ש a קבוצה פתוחה, אנחנו יודעים שיש $r > 0$ כך ש

$$B(a, r) \subseteq A$$

כלומר

$$\|y - a\| < r \Rightarrow y \in A$$

אנחנו נוכיח ש $B(x, r) \subseteq A + \{b\}$ וזה יוכיח ש $A + \{b\}$ קבוצה פתוחה. באמת, אם $y \in B(x, r)$ אז

$$\|y - x\| < r$$

$$\|y - (a + b)\| < r$$

$$\|(y - b) - a\| < r$$

כלומר

$$y - b \in B(a, r) \subseteq A$$

ולכן

$$y \in A + \{b\}$$

כנדרש.

(ג) אם A, B סגורות אז $A + B$ סגורה.

פתרון. לא נכון. בתוך \mathbb{R}^2 נבחר $A = \{(x, y) \mid x = 0\}$ ו $B = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ אז $A + B = \{(x, y) \mid x > 0\}$ שזאת לא קבוצה פתוחה.

(ד) אם A פתוחה ו B סגורה אז $A + B$ פתוחה. הוכחנו כבר בסעיף ב' שזה נכון.

4. האם גבול הסדרה הבאה קיים? ואם כן, מהו?

$$\left(\frac{n^3 + 4n + 5}{n^6 + 2n^2 + 3}, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right)$$

פתרון. ראינו שאפשר לחשב גבול של סדרה רכיב ורכיב ולכן פשוט נחשב את הגבולות של הרכיבים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4n + 5}{n^6 + 2n^2 + 3} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

לכן הגבול של הסדרה הוא

$$(0, e^{-1})$$

5. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה ב \mathbb{R}^n . הוכיחו או הפריכו: אם $y_n = d_2(x_n, 0)$ היא סדרת מספרים עולה ממש אז x_n היא סדרה מתכנסת ב \mathbb{R}^n .
הערה: d_2 היא המטריקה האוקלידית הסטנדרטית.

פתרון. הטענה לא נכונה אפילו ב \mathbb{R} . נבחר $x_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ואז הסדרה חסומה כי $|x_n| < 1$. אבל $y_n = d(x_n, 0) = |x_n| = 1 - \frac{1}{n}$ זאת סדרה עולה ממש. ברור ש x_n לא מתכנסת.