תרגול 5

1. תהי f פונקציה מדידה לבג. הראו כי קיימת פונקציה מדידה בורל g כך ש $g = f$ כמעט בכל מקום.

פתרון: ראינו כי אם f מדידה לבג אזי קיימת סדרה של פונקציות פשוטות f_n כך ש $f_n \to f$. נסמן $f_n = \sum_{i=1}^{n} c_n 1_{A_i^n}$ כאשר c_n מספרים ממשיים ו A_n קבוצות מדידות לבג. למדנו שהאיפיון של קבוצות לבג הוא שניתן למצוא לכל קבוצה מדידה לבג A קבוצה מדידה בורל E (G_δ) כך ש $E = A \cup F$, $m(F) = 0$ ו $F \cap A = \varnothing$. מכאן שנוכל למצוא לכל A_i^n קבוצה מדידה בורל E_i^n כך ש $E_i^n = A_i^n \cup F_i^n$, $m(F_i^n) = 0$ ו $F_i^n \cap A_i^n = \varnothing$. כעת נגדיר את הפונקציה הפשוטה $g_n = \sum_{i=1}^{n} d_n 1_{E_i^n}$. מההגדרה של E_i^n פונקציה זו מדידה בורל. כעת נגדיר את הקבוצה $B = \{x : \lim g_n(x) \neq f(x)\}$, ונשים לב כי אם $f_n(x) = g_n(x)$ לכל n אז $x \in B^c$ מכאן ש $B \subseteq B' = \{x : \exists n, f_n(x) \neq g_n(x)\}$. נשים לב כי $B' = \bigcup_{i,n} F_i^n$, מכאן ש $m(B) \le m(B') = m\left(\bigcup_{i,n} F_i^n\right) \le \sum_{i,n} m(F_i^n) = 0$. נגדיר את הפונקציה g ע"י $\lim g_n(x) = g(x)$ על B^c ו $g = 0$ על B וכבר ראינו שאז g הינה מדידה בורל שכן g_n הינן כאלו. כמו כן, קל לראות כי $g = f$ כב"מ מכאן ש g הינה הפונקציה הדרושה.

2. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ מדידה לבג ואינטגרבילית. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת פונקציה רציפה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אשר מתאפסת מחוץ לקבוצה חסומה ו $\int |f - g| dm < \varepsilon$.

פתרון: נוכיח זאת בכמה שלבים:

א. אם $-\infty < a < b < \infty$ אזי לכל $\delta \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ נסתכל על הפונקציות $\tau_{a,b,\delta}$ אשר מקבלות 1 על $x \in (a+\delta, b-\delta)$, 0 מחוץ לקטע (a,b) ולינאריות $[a, a+\delta]$ ו $[b-\delta, b]$. ברור כי לכל קטע (a,b) נוכל לבחור קטע $(a+\delta, b-\delta)$ כך ש $m\left((a,b) \setminus (a+\delta, b-\delta)\right) < \varepsilon$. מכאן ש $\int \left|\tau_{a,b,\delta} - 1_{(a,b)}\right| dm < \varepsilon$.

ב. ראינו בהרצאה כי אם E מדידה לבג ו $m(E)<\infty$ אז ניתן למצוא קטעים זרים ופתוחים $I_1,I_2,...,I_l$ כך ש $m\left(E\Delta\bigcup_{i=1}^{l}I_i\right)<\frac{\varepsilon}{2}$. מכאן ש $\int\left|\sum_{i=1}^{l}1_{I_i}-1_E\right|dm<\frac{\varepsilon}{2}$. מצד שני עפ"י משראינו נובע כי ניתן לבחור δ כזאת כך ש $\int\left|\tau_{I_i,\delta}-1_{I_i}\right|dm<\frac{\varepsilon}{2l}$ ומכאן ש $\int\left|\sum_{i=1}^{l}\tau_{I_i,\delta}-\sum_{i=1}^{l}1_{I_i}\right|dm<\sum_{i=1}^{l}\frac{\varepsilon}{2l}=\frac{\varepsilon}{2}$. ועכשיו, אם נסמן $\psi=\sum_{i=1}^{l}\tau_{I_i,\delta}$, נובע כי $\int|\psi-1_E|dm<\varepsilon$.

ג. למדנו כי אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ אינטגרבילית אז קיימת פונקציה $\varphi=\sum_{i=1}^{N}c_kI_{E_i}$ פשוטה ואינטגרבילית כך ש $\int|\varphi-f|dm<\frac{\varepsilon}{2}$. מהעובדה כי φ אינטגרבילית נובע כי $m(E_i)<\infty$ לכל i . עפ"י שלב ב נוכל למצוא פונקציה ψ_j רציפה כך ש $\int\left|\psi_j-1_{E_j}\right|dm<\frac{\varepsilon}{2N|c_j|}$. נסמן $\psi=\sum_{i=1}^{l}c_j\psi_j$ וקיבלנו

$$\begin{aligned}\int|\psi-f|\,dm&=\int|\phi-\psi|\,dm+\int|f-\phi|\,dm\\&\le\sum_{j=1}^{N}\int\left|c_j\psi_j-c_j1_{E_j}\right|dm+\frac{\varepsilon}{2}\\&\le\sum_{j=1}^{N}|c_j|\frac{\varepsilon}{2N|c_j|}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

<u>למת פאטו</u>

תזכורת: ראינו בהרצאה את למת פאטו האומרת שאם $f_n:X\to[0,\infty]$, פונקציות מדידות אזי מתקיים $\int_X\liminf_{n\to\infty}f_nd\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_X f_nd\mu$.

<u>דוגמא לאי שוויון חזק:</u>

נתבונן בממ"ח $(\mathbb{R},L,m)$, ונגדיר סדרת פונקציות פשוטות ע"י $f_n(x)=\frac{1}{n}$. קל לראות:

1. $\underline{\lim}f_n=0$

2. לכל n $\int_{\mathbb{R}} f_n dm = \infty$

ולכן האי-שוויון בלמת פאטו הוא חזק: $0 < \infty$.

3. תרגיל (למת פאטו ההפוכה) : הוכיחו כי אם $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות המוגדרות על הממ"ח (X, S, μ). אם קיימת פונקציה אינטגרבילית g $|f_n| \le g$ לכל n, אזי

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

פתרון: נסתכל על סדרת הפונקציות $h_n = g - f_n$, זוהי כמובן סדרה חיובית. בנוסף, $\int_X h_n d\mu = \int_X (g - f_n) d\mu = \int_X g d\mu - \int_X f_n d\mu$, ולכן מוגדר היטב. כעת, עפ"י למת פאטו נקבל

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) d\mu = \int_X \left(g + \liminf_{n\to\infty} (-f_n)\right) d\mu$$
$$= \int_X g d\mu + \int_X \liminf_{n\to\infty} (-f_n) d\mu = \int_X g d\mu - \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n) d\mu$$
$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X -f_n d\mu = \int_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$
$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

4. אם f_n הינה סדרה של פונקציות אי-שליליות ואינגרביליות כך ש $f_n \downarrow f$, הראו כי $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

פתרון: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int_X f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$.

מצד שני, עפ"י למת פאטו ההפוכה, נובע כי $\int_X f d\mu = \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \le \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

לסיכום, קיבלנו $\int_X f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$, ומכאן ש $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$

התכנסות נשלטת

תזכורת: יהיו $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \to f$, ונניח וקיימת פונקציה איטגרבילית $|f_n| \le g$ לכל n . אזי f_n ו f אינטגרביליות ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f$$

5. תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ותהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חסומה, מדידה (לבג) ורציפה בנקודה $x_0 = 1$ הוכיחו שהגבול $I = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x)\,dx$ קיים, וחשבו אותו.

פתרון: נוכל לרשום את האינטגרל בצורה הבאה: $\int_{\mathbb{R}} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x) I_{(-n,n)}(x)\,dx$.

נגדיר את סדרת הפונקציות המדידות $h_n(x) = f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x) I_{(-n,n)}(x)$.

f רציפה בנקודה 1 ולכן $\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) = f(1)$ וקיימת פונקציית הגבול $h = f(1) g(x) I_{(-\infty,\infty)}(x) = f(1) g(x)$. יהי M חסם של f . לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|h_n(x)| \le M|g(x)|$ והפונקציה באגף ימין אינטגרבילית. ע"פ משפט ההתכנסות הנשלטת הגבול הוא $f(1)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$.

6. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית, $a\in\mathbb{R}$ ונגדיר עבור $x > a$

$$F(x) = \int_{[a,x]} f\,dm$$

הראו כי F רציפה.

פתרון: ניקח סדרה $a < x_n$ כך ש $x_n \to x$. נגדיר $h_n = f 1_{[a,x_n]}$ וברור כי $h_n \to f 1_{[a,x]}$ או $h_n \to f 1_{[a,x)}$ אשר שוות כב"מ ולכן האינטגרל שלהן זהה. כעת, מכיוון שהסדרה x_n מתכנסת נובע כי מ n מסויים $x_n < M$, כאשר $x < M \in \mathbb{R}$. נשים לב כי $|h_n| \le |f| 1_{[a,M]}$ וכן $|f| 1_{[a,M]}$ אינטגרבילית.
מכאן שכל התנאים להתכנסות הנשלטת מתקיימים ולכן

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,x_n]} f\,dm = \lim_{n\to\infty}\int h_n\,dm = \int_{[a,x]} f\,dm = F(x).$$