

תרגול 8 - התפלגות נורמלית רב מימדית - תשע"ט

28 באפריל 2019

• הגדרה - משתנה מקרי n מימדי

- יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $X_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) פונקציות ממשיות על Ω . נגדיר $\vec{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (X_1, \dots, X_n)(\omega)$ ונקבל פונקציה וקטורית $\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- כאשר $\vec{X} : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ מדידה. אזי נקרא מ"מ n מימדי על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ או "וקטור מקרי n מימדי" על מרחב ההסתברות.

- $\vec{X} : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ הוא משתנה מקרי n מימדי על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אם ורק אם $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \vec{X}^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid \vec{X}(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

- טענה

* $(X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ הוא מ"מ n מימדי על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אם ורק אם $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} : X_k : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ הוא משתנה מקרי על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- טענה

* נזכר כי $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}^n\})$ ומכיוון שבכדי להוכיח כ פונקציה היא מדידה, מספיק להראות תנאי מתאים על היוצרים. נביט על הטענה הבאה:

$\vec{X} : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ משתנה מקרי n מימדי אם ורק אם $\forall \vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \{ \omega \in \Omega \mid \vec{X}(\omega) \leq \vec{a} \} = \{ \omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leq a_1, \dots, X_n(\omega) \leq a_n \} \in \mathcal{F}$

- דוגמא

נגדיר מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ באופן הבא:

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad *$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \cap 2^\Omega \quad *$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Area of } A}{\pi} \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad \text{ו-} \quad \mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad *$$

מידת הסתברות על \mathcal{F} . הוכח!

$$X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{נגדיר את המשתנים המקריים} \quad *$$

$$X(x, y) = x, \quad Y(x, y) = y \quad \text{הבא:}$$

$$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{משתנה מקרי דו מימדי כי} \quad *$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \{ (x, y) \in \Omega \mid X(x, y) \leq a, Y(x, y) \leq b \} =$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq a, y \leq b\} \cap \Omega = (-\infty, a] \times (-\infty, b] \cap \Omega \in \mathcal{F}$$

• משתנה מקרי נורמלי n מימדי

- הגדרה (1-מימדי)

* וקטור המשתנים המקריים X מתפלג נורמלית אם:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(t-\mu) \cdot (\sigma^2)^{-1} \cdot (t-\mu)}$$

$$\text{כאשר } \mathbb{E}[X] = \mu \text{ ו- } \text{var}[X] = \sigma^2$$

- הגדרה (2-מימדי)

* וקטור המשתנים המקריים $\vec{X} = (X_1, X_2)$ מתפלג נורמלית אם:

$$f_{\vec{X}}(\vec{t}) = f_{(X_1, X_2)}(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot Q\right)$$

$$Q = \begin{bmatrix} t_1 - \mathbb{E}[X_1] & t_2 - \mathbb{E}[X_2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} t_1 - \mathbb{E}[X_1] \\ t_2 - \mathbb{E}[X_2] \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) \end{bmatrix}$$

- הגדרה (n מימדי)

* וקטור המשתנים המקריים $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ מתפלג נורמלית אם פונקציית הצפיפות:

$$f_{\vec{X}}(\vec{t}) = f_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{t} - \vec{\mu})^T (\Sigma^{-1}) (\vec{t} - \vec{\mu})\right)$$

כאשר

$$\vec{\mu} = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n])$$

$$(\Sigma)_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} = \text{Cov}(X_i, X_j)$$

(Σ) מטריצה סימטרית וחיובית לחלוטין מדרגה n , כלומר $\det(\Sigma) \neq 0$.
אם $\det(\Sigma) = 0$ אין להתפלגות הנורמלית הרב מימדית פונקציית צפיפות).

* במקרה ומטריצת השונויות Σ איננה הפיכה. מתקבל "משתנה מקרי רב-נורמלי סינגולרי" ונגדיר את המשתנה המקרי באמצעות הפונקציה האופיינית התקפה גם למקרה זה.

- **טענה** - וקטור $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ מתפלג נורמלית (רב מימדי) אם ורק אם כל צירוף לינארי של איבריו מתפלג נורמלית.

- תרגיל

* יהיו $\{X_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים $\forall_i X_i \sim N(0, 1)$.

· האם הוקטור המקרי $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ מתפלג נורמלית?

· האם ל- \vec{X} יש פונקציית צפיפות? אם כן, חשבו את פונקציית הצפיפות של \vec{X} .

* פתרון

· כדי לקבוע אם \vec{X} מתפלג נורמלית מספיק לחשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של \vec{X} (או את הפונקציה האופיינית), מכיוון שזאת קובעת באופן יחיד את ההתפלגות:

$$\mathbb{E}[e^{\vec{t} \cdot \vec{X}}] = \mathbb{E}[e^{\vec{t} \cdot \vec{X}}] \stackrel{\text{independence}}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{t_i X_i}] = \prod_{i=1}^n e^{\frac{1}{2} \cdot t_i^2} = e^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot t_i^2} = e^{\frac{1}{2} \|\vec{t}\|^2}$$

· $\Sigma = I_n$ מטריצה סימטרית. חיובית לחלוטין (מטריצה A היא חיובית לחלוטין אם כל המינורים הראשיים שלה חיוביים) ו- $\det(\Sigma) = 1 \neq 0$ לכן, קיימת ל- \vec{X} פונקציית צפיפות. ועל פי הנוסחה מקיימת:

$$\begin{aligned} f_{\vec{X}}(\vec{t}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{t} - \vec{\mu})^T (\Sigma^{-1})(\vec{t} - \vec{\mu})\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{t})^T (I_n)(\vec{t})\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\|\vec{t}\|^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\|\vec{t}\|^2} \end{aligned}$$

- תרגיל (החלפת משתנים ופונקציית צפיפות)

* אם $\vec{X} \sim N(0, I_n)$ (נורמלי סטנדרטי) אזי לכל מטריצה אורתוגונלית A (מטריצה ריבועית ממשית המקיימת $AA^T = A^T A = I_n$) עבורה $\vec{W} = A\vec{X}$ מתקיים $\vec{W} \sim N(0, I_n)$

* פתרון

$$\mathbb{P}(\vec{W} \leq x) = \int_{-\infty}^x f_W(\vec{t}) d\vec{t} = \mathbb{P}(A\vec{X} \leq x) = \mathbb{P}(\vec{X} \leq A^T x) = \int_{-\infty}^{A^T x} f_X(\vec{s}) d\vec{s}$$

ניתן לחשוב על כך בדרך נוספת:

* נבצע החלפת משתנים באופן הבא- יהי A מטריצה אורתוגונלית. אזי $A^T \vec{s} = \vec{t}$. מטריצה אורתוגונלית היא הפיכה ולכן, מתקיים $J(t) = \frac{d\vec{t}}{d\vec{s}}(t) = A^T$ ואז $\vec{t}(s) = A^T \vec{s}$, כלומר, $\vec{t} = A^{-1} \vec{s}$. מתכונת מטריצות אורתוגונליות מתקיים $|J(t)| = \left|\frac{d\vec{s}}{d\vec{t}}(t)\right| = |A^T| \in \{1, -1\}$. לכן, עד כדי סימן:

$$\int_{-\infty}^x f_W(\vec{t}) d\vec{t} = \int_{-\infty}^{A^T x} f_W(\vec{t}(s)) \cdot |J(t)| d\vec{s} = \int_{-\infty}^{A^T x} f_W(\vec{t}(s)) d\vec{s}$$

עתה, מכיוון ש- $\vec{W} = A\vec{X}$ נואז

$$\mathbb{E}[e^{\vec{s} \cdot \vec{W}}] = \mathbb{E}[e^{(A\vec{t}) \cdot (A\vec{X})}] = \mathbb{E}[e^{\vec{t} \cdot \vec{X}}]$$

הקובע ביחידות את פונקציית ההתפלגות המצטברת, ובהתאמה את פונקציית הצפיפות (ע"י גזירה). לכן:

$$\int_{-\infty}^x f_W(\vec{t}) d\vec{t} = \int_{-\infty}^{A^T x} f_W(\vec{t}(\vec{s})) d\vec{s} = \int_{-\infty}^{A^T x} f_X(\vec{t}(\vec{s})) d\vec{s} =$$

$$\int_{-\infty}^{A^T x} e^{-\frac{1}{2} \cdot \|A^T \vec{s}\|^2} d\vec{s} = \int_{-\infty}^{A^T x} e^{-\frac{1}{2} \cdot \|\vec{s}\|^2} d\vec{s} = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \cdot \|\vec{t}\|^2} d\vec{t}$$

מתקיים $F_W(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \cdot \|\vec{t}\|^2} d\vec{t}$ לכן, $\vec{W} \sim N(0, I_n)$ ובעלת פונקציית צפיפות מתאימה.