

מבחן מועד ג' בקורס 83-118 תש"ף מתמטיקה בדידה 2 (הנדסה)

מרצה: תומר באואר

מתרגל: אריאל ויצמן

הוראות יש לפתור את כל ארבע השאלות. לכל השאלות ניקוד זהה.

1. **משך המבחן** הוא שעתיים וחצי, ועוד עשר דקות לסריקה והעלאה של התשובות.
 2. **חומר העזר** הוא פתוח, אך מודפס בלבד או שכתבתם בעצמכם. כלומר אין להשתמש בטלפון, במחשב או בכל אמצעי אלקטרוני אחר. הציגו למשגיחים את כל חומר העזר שלכם לפני תחילת המבחן.
 3. **שימוש במחשבון** מדעי רגיל מותר. שוב, אסור שימוש בטלפון, במחשב או בכל אמצעי אלקטרוני אחר לחישובים.
 4. כתבו את הפתרון לכל שאלה **בדף נפרד** ונמקו אותו היטב.
 5. אפשר **לכתוב "לא יודעים"** בתור הפתרון לשאלה שלמה ולקבל 5 נקודות עבורו. אפשרות זו תתקבל רק לפתרון שהוא ריק לחלוטין לשאלה שלמה (לא סעיף) פרט למילים "לא יודעים" וללא שום פתרון חלקי לידו.
 6. כתבו בעט כחול או שחור באופן ברור.
 7. מהלך **המבחן יוקלט** בתוכנת זום. שאלות במהלך המבחן אפשר לשאול בצ'ט פרטי בזום למרצה או למתרגל, או באימייל לתקלות טכניות.
 8. בשאלות שבהן התשובה הסופית היא מספר או נוסחה סגורה אין להשתמש עבורה בסימן הסכום \sum , סימן המכפלה \prod או שלוש נקודות.
- הערה. המבחן היה מקוון במודל ולא בטופס הזה. בפועל לכל שאלה היו כמה גרסאות, כך שהטפסים שהתקבלו היו מעט שונים זה מזה.

עצות בכתובה הנה כמה נקודות שכדאי לדעת כאשר אתם עונים על המבחן:

1. לחומר העזר ניתן להסתפק בדף הנוסחאות למבחן, ואפילו לא צריך מחשבון.
2. בכתבת פתרון אתם צריכים להעביר את הידע שלכם מן הראש אל הדף. זה לא מספיק לדעת או להבין מה צריך להיות הפתרון לשאלות, אלא גם לתקשר את הידע וההבנה האלו.
3. חלקו את זמנכם בתבונה. נסו לעבור על כל השאלות ולכתוב טיוטה מהירה לרעיון הראשוני של דרך הפתרון, ואז כתבו פתרון מלא לשאלות שאתם יודעים לענות עליהן.
4. אנחנו לא קוראי מחשבות, ולכן אתם צריכים לכתוב את מה שאתם רוצים שנדע, ורק את מה שרלוונטי לפתרון. כתבו בכתב מסודר, עם משפטים מלאים ועם נימוקים והסברים לכל מה שדרוש נימוק או הסבר. כאשר משתמשים בביטויים כמו "קל לראות...", "ברור ש...", "מסיקים מייד כי...", אז צריך להוכיח את הדברים האלו. זה הרי צריך להיות קל, ברור ומייד.
5. לשאלה מסויימת יכולים להיות כמה פתרונות נכונים שונים. מצד שני, יכולים להיות לה גם הרבה פתרונות שגויים שונים. לפעמים אחד מהפתרונות הנכונים הוא יותר פשוט, או יותר קצר, או דומה למה שראינו בכיתה מאשר שאר הפתרונות. זה בסדר גמור לענות עם פתרון אחר, ובכל מקרה צריך להראות שהוא נכון ולא שגוי.

שאלות

שאלה 1. תהי $B = (B_{n,k})$ מטריצה בגודל $(r+1) \times (r+1)$ שהאיבר במקום (n, k) שלה הוא

$$B_{n,k} = \binom{n}{k}$$

לכל $0 \leq k, n \leq r$ (האינדקסים לשורות והעמודות הם בין 0 לבין r כולל). הוכיחו כי האיבר במקום (n, k) של המטריצה ההופכית B^{-1} הוא $(-1)^{n-k} \binom{n}{k}$.
 רמז: זהויות קומבינטוריות וזכרו שהסכמנו שאם $k > n \geq 0$ אז $\binom{n}{k} = 0$ וגם $\binom{0}{0} = 1$.

שאלה 2. תהי הפונקציה היוצרת

$$a(x) = 1 + 3 \sum_{n \geq 0} 10^n x^{2n+1}$$

שידוע לנו שהיא הפיכה, ונסמן $b(x) = a(x)^{-1}$.

1. (10 נק') מצאו נוסחה סגורה עבור $b(x)$ כפונקציה רציונלית (מנה של שני פולינומים).

2. (15 נק') נניח $b(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$. מצאו נוסחה סגורה למקדם b_n (היא תלויה רק ב- n).
 הציגו בנוסף חישוב מפורש של המקדמים x^0, x^1, x^2 בפונקציה היוצרת $a(x)b(x)$.
 רמז: בסעיף השני זה טוב לדעת כי $5 \cdot 2 = 10$ וגם $5 - 2 = 3$.

שאלה 3. יש ארבעה סוגי סוגריים נפוצים: עגולים, מרובעים, מסולסלים ומזווים. נסמן ב- P_n את מספר המחרוזות המאוזנות מאורך $2n$ שבהן מותר להשתמש בארבעת סוגי הסוגריים. לדוגמה $P_2 = 32$ כי

()	() ()	[]	[] []	{ }	{ } { }	< >	< > < >
([])	() []	[()]	[] ()	{ () }	{ } ()	< () >	< > ()
({ })	() { }	[{ }]	[] { }	{ [] }	{ } []	< [] >	< > []
(< >)	() < >	[< >]	[] < >	{ < > }	{ } < >	< { } >	< > { }

הן כל האפשרויות למחרוזות כאלו מאורך 4. שימו לב כי למשל $([])$ אינה מחרוזת מאוזנת.

1. (10 נק') מצאו נוסחה סגורה לפונקציה היוצרת $P(x) = \sum_{n \geq 0} P_n x^n$.

2. (15 נק') נסמן ב- P_n^+ את מספר המחרוזות המאוזנות מאורך $2n$ שבהן מותר להשתמש בארבעת סוגי הסוגריים, ושכל סוג מופיע לפחות פעם אחת. לדוגמה $P_2^+ = 0$ כי אין במחרוזות לעיל אף אחת שבהן מופיעים כל הסוגים. מצאו נוסחה סגורה לפונקציה היוצרת $P^+(x) = \sum_{n \geq 0} P_n^+ x^n$.

שאלה 4. יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר ומישורי. נתון שבדיוק שליש מהקודקודים של G הם מדרגה 3, שליש הם מדרגה 4 ושליש הם מדרגה 5.

נניח שיש לו ייצוג מישורי שבו כל צלע חלה בשתי פאות, וכל פאה היא משולש או מרובע (כלומר חלה ב-3 או ב-4 צלעות). מצאו כמה משולשים יש בגרף.