שאלות חזרה למבחן.

1. יהיו G חבורה סופית, H ת"ח של G ו N ת"ח נורמלית של G. נתון כי הסדר של H זר לאינדקס של N ב G. הוכיחו כי $H \subseteq N$.

2. תהי G חבורה סופית לא אבלית. הוכיחו כי $|Z(G)| \le \frac{1}{4}|G|$.

3. ענו על הסעיפים הבאים:

   א. נסחו את הנוסחה המקשרת בין העוצמה של מחלקות הצמידות בחבורה סופית G לבין הסדר של מרכז.
   ב. תהי G חבורה סופית, $N \lhd G$ ת"ח נורמלית השונה מ G. נתון כי N לא מוכלת במרכז $Z(G)$. הוכיחו כי ל G יש תת חבורה-ממש H כך ש $|H| \ge \sqrt{|G|}$.
   רמז: השתמשו בסעיף א' עבור איבר של N שלא שייך למרכז של G.

4. ענו על הסעיפים הבאים:

   א. תהי G חבורה ו H ת"ח בעלת משלים נורמלי (דהיינו, תת חבורה נורמלית $N \lhd G$ המקיימת $HN = G$ וכן $H \cap N = \{1\}$). הוכיחו כי אם שני איברים ב H צמודים ב G, אז הם גם צמודים ב H.
   ב. תהי $N \lhd G$ תת חבורה נורמלית של G ותהי C מחלקת צמידות של G המוכלת ב N. נתון כי $[G:N] = p$ עבור p ראשוני וכן ש C אינה מחלקת צמידות של N.
   הוכיחו ש C היא איחוד של p מחלקות צמידות זרות של N.
   רמז: הגדירו פעולה של G/N על קבוצת מחלקות הצמידות של N.

5. תהי N ת"ח נורמלית של G. הוכיחו כי אם $N \cap G' = \{1\}$, אז N מוכלת במרכז של G.

6. תהי G חבורה. תת חבורה H של G תקרא ת"ח *אופיינית* של G אם לכל אוטומורפיזם φ של G, מתקיים $\varphi(H) = H$. הוכיחו שאם H ת"ח אופיינית של N ו N ת"ח נורמלית ב G, אז H ת"ח נורמלית של G.

7. תהי G חבורה ו N ת"ח נורמלית מסדר 7, כך ש $G/N \equiv D_{10}$. הוכיחו כי $|G| = 70$, ל G יש תת חבורה נורמלית מסדר 35 ול G יש 5 חבורות מסדר 14 שאינן נורמליות.

8. תהי G חבורה פשוטה מסדר גדול משתיים. תהי $Aut(G)$ חבורת האוטומורפיזמים של G. הוכיחו כי המרכז של $Aut(G)$ הוא טרוויאלי אם ורק אם G לא אבלית.

(הוכחנו בתרגול כי אם G לא אבלית ובעלת מרכז טרוויאלי אז גם חבורת האוטומורפיזמים היא בעלת מרכז טרוויאלי. אחרת התרגיל היה נראה לי קשה מדי. גם ככה ייתכן שהוא מעט קשה מדי).

9. כמה איברים מסדר 6 יש ב S_6? כמה איברים מסדר 6 יש ב A_6.

10. תהי G תת חבורה של החבורה הסימטרית S_n. הוכיחו כי אם יש ב G תמורה אי זוגית, אז $G \cap A_n$ היא תת חבורה מאינדקס 2 של G.

11. תהי G חבורה פשוטה לא אבלית סופית ותהי H תת חבורה מאינדקס p, כש p ראשוני. הוכיחו כי p הוא הראשוני הגדול ביותר המחלק את הסדר של G.

12. הוכיחו שאם G חבורה מסדר $392 = 2^3 \cdot 7^2$, אז ל G יש תת חבורה נורמלית מסדר 7 או תת חבורה נורמלית מסדר 49.

בהצלחה ☺