## הגדרה

מרחב טופולוגי $(X,T)$ הוא קבוצה $X$ ומשפחה $T$ של תתי קבוצות של $X$, המקיימת:

1. $\emptyset, X \in T$
2. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות בך ש$U_\alpha \in T$ לכל $\alpha \in I$, אז גם $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha \in T$
3. אם $U_1, U_2, \dots U_n$ אוסף <u>סופי</u> של קבוצות כך ש$U_i \in T$ לכל $1 \leq i \leq n$ אז גם $\bigcap\limits_{1\leq i\leq n} U_i \in T$

במקרה כזה, $T$ תיקרא טופולוגיה על $X$, והקבוצות ב$T$ יקראו קבוצות פתוחות ב$X$.

## דוגמאות למרחבים טופולוגיים

1. $(X,d)$ מרחב מטרי ו$T$ אוסף הקבוצות הפתוחות המוגדרות באמצעות המטריקה $d$. $T$ אז נקראת הטופולוגיה המושרה ע"י המטריקה $d$.
2. $X$ קבוצה כלשהי, $T = \{\emptyset, X\}$. זו נקראת הטופולוגיה הטריוויאלית על $X$.
3. לכל קבוצה $X$ אפשר לקחת $T = P(X)$. זו נקראת הטופולוגיה הדיסקרטית על $X$.

## הגדרה

$(X,T)$ יקרא מטריזבילי אם יש מטריקה $d$ על הקבוצה $X$ כך ש$d$ משנה את $T$.

## טענה

הטופולוגיה הדיסקרטית היא מטריזבילית.

### הוכחה

קחו את המטריקה הדיסקרטית.

---

אם ב$X$ יותר מנקודה אחת אז המטריקה הטריוויאלית איננה מטריזבילית.
נראה שכל מטריקה על $X$ משרה טופולוגיה שאיננה הטופולוגיה הטריוויאלית. ניקח $a \neq b \in X$ כלשהם. נסמן $r = d(a,b)$ ונביט בקבוצה $U = B(a,r)$:

- $U$ קבוצה פתוחה כי היא כדור פתוח
- $U \neq \emptyset$ כי $a \in U$
- $U \neq X$ כי $b \notin U$

## תרגיל

יהי $(M,d)$ מרחב מטרי. אזי לכל $a\in M$ הקבוצה $\{a\}$ סגורה או במילים אחרות $M-\{a\}$ פתוחה. מכאן שיש לנו $|\mathbb{N}|$ קבוצות בנות פתוחות כי האוסף $\{M-\{a\}\}_{a\in M}$ הוא מהעוצמה הזאת.

## דוגמה

5. תהי $X$ קבוצה, ונגדיר $$T=\left\{A\subseteq X\left|\begin{array}{c}|X-A|<\infty\\ \vee\\ A=\emptyset\end{array}\right.\right\}$$

**תרגיל:** (א) זוהי טופולוגיה

(ב) עבור $X$ אינסופית $X$ איננה מטריזבילית

## הגדרה

יהיו $(X,T)$, $(Y,S)$ שני מרחבים טופולוגיים.

$f:X\to Y$ תקרא רציפה אם לכל $U\in S$ מתקיים ש$f^{-1}(U)\in T$

במילים: לכל $U\subseteq Y$ פתוחה מתקיים ש$f^{-1}(U)$ פתוחה ב$X$.

עוד יותר במילים: תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה.

## טענה

אם $(X,T_1),(Y,T_2),(Z,T_3)$ שלושה מרחבים טופולוגיים.

אם $f:X\to Y$ רציפה ו$g:Y\to Z$ רציפה אז $g\circ f:X\to Z$ גם כן רציפה.

### הוכחה

תהי $U\subseteq Z$ פתוחה. אזי

$$(g\circ f)^{-1}(U)=f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$$

פתוחה ב$X$.

## טענה

1. לכל מרחב טופולוגי $(X,T)$ העתקת הזהות $\mathrm{Id}:X\to X$ רציפה.

**הוכחה:** תהי $U\subseteq X$ פתוחה ב$X$. אזי $\mathrm{Id}^{-1}(U)=u$ לכן כמובן פתוחה ב$X$.

2. יהיו $X,Y$ מ"ט, $b\in Y$. נגדיר $K_b:X\to Y$ ע"י לכל $x\in X$, $K_b(x):=b$. זו נקראת פונקציה קבועה שערכה הקבוע הוא $b$.

**טענה:** $K_b$ רציפה

**הוכחה:** תהי $U\subseteq Y$ פתוחה. אזי $K_b^{-1}(U)=\begin{cases}X & b\in U\\ \emptyset & b\notin U\end{cases}$

## הגדרה

יהי $X$ מ"ט, $a \in X$.
$U \subseteq X$ נקראת סביבה של $a$ אם $U$ פתוחה ו$a \in U$.

## הגדרה

יהיו $X, Y$ מ"ט, $f : X \to Y$, $a \in X$.
אזי $f$ תקרא רציפה ב$a$ אם לכל סביבה $U$ של $f(a)$ (ב$Y$) יש סביבה $V$ של $a$ (ב$X$) כך ש$f(V) \subseteq U$

## טענה

$f : X \to Y$ רציפה אס"ם היא רציפה בכל נקודה $x \in X$.

### הוכחה

$\Leftarrow$ נניח $f$ רציפה. תהי $a \in X$. תהי $U$ סביבה של של $f(a)$. אזי $f^{-1}(U)$ סביבה של $a$, ומתקיים $f\left(f^{-1}(U)\right) \subseteq U$.

$\Rightarrow$ תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. נראה ש$f^{-1}(U)$ פתוחה ב$X$. תהי $a \in f^{-1}(U)$ כלומר $f(a) \in U$. לכן קיימת $V_a$ סביבה של $a$ כך ש$f(V_a) \subseteq U$, כלומר $V_a \subseteq f^{-1}(U)$. כעת מהלמה השימושית

$$\bigcup_{a \in f^{-1}(U)} V_a = f^{-1}(U)$$

לכן $f^{-1}(U)$ פתוחה.

## הגדרה

יהי $(X, T)$ מ"ט ותהי $A \subseteq X$.
טופולוגיית "תת המרחב" על $A$ מוגדרת באופן הבא:
נגדיר אוסף $S \subseteq P(A)$ באופן הבא:

$$S = \{u \subseteq A | \exists_{V \in T} U = V \cap A\}$$

## טענה

$S$ היא טופולוגיה על $A$

### הוכחה

1.
- $\emptyset = \emptyset \cap A$ כי $\emptyset \in S$
- $A = X \cap A$ כי $A \in S$

2. נניח $\{U_\alpha\}$ אוסף כך שלכל $\alpha$ $U_\alpha \in S$. כלומר לכל $\alpha$ יש $V_\alpha \in T$ כך ש$U_\alpha = V_\alpha \cap A$.
אזי

$$\bigcup U_\alpha = \bigcup (V_\alpha \cap A) = \left(\bigcup V_\alpha\right) \cap A \in S$$

3. נניח $U_1, \ldots U_n \in S$. כלומר לכל $i$ יש $V_i \in T$ כך ש$U_i = V_i \cap A$

$$\bigcap_{1 \le i \le n} U_i = \bigcap_{1 \le i \le n} (V_i \cap A) = \left(\bigcap_{1 \le i \le n} V_i\right) \cap A \in S$$

## הגדרה

$A \subseteq X$. מוגדרת העתקת ההכלה $i : A \to X$ ע"י $i(a) = a$

## טענה

אם $X$ מ"ט ו$A \subseteq X$ תת מרחב, אזי העתקת ההכלה $i : A \to X$ רציפה.

### הוכחה

תהי $U \subseteq X$ פתוחה ב$X$.

$$i^{-1}(U) = U \cap A$$

ולכן פתוחה ב$A$.

## הגדרה

אם $f : X \to Y$ ו$A \subseteq X$ נגדיר $f|_A : A \to Y$ ע"י $f|_A(a) := f(a)$.
מתקיים ש$f|_A = f \circ i$

## טענה

אם $f : X \to Y$ רציפה, $A \subseteq X$, אז $f|_A : A \to Y$ רציפה.

### הוכחה

$f|_A = f \circ i$ ולכן רציפה.

## משפט

יהיו $X,Y$ מ"ט, $f:X\to Y$ רציפה, $f\left(X\right)\subseteq B\subseteq Y$. אזי ניתן להגדיר $\hat{f}:X\to B$ ע"י $\hat{f}\left(x\right)=f\left(x\right)$. אזי גם $\hat{f}$ רציפה.

### הוכחה

תהי $U\subseteq B$ פתוחה ב$B$. צ"ל $\hat{f}^{-1}\left(U\right)$ פתוחה ב$X$.
$U$ פתוחה ב$B$ פרושו שקיימת $V\subseteq Y$ פתוחה ב$Y$ כך ש$U=V\cap B$

$$\hat{f}^{-1}\left(U\right)=\left\{ x\in X\middle|\hat{f}\left(x\right)\in U\right\} =\left\{ x\in X|f\left(x\right)\in U_{=V\cap B}\right\} =\left\{ x\in X|f\left(x\right)\in V\right\} =\underbrace{f^{-1}\left(V\right)}_{\text{open}}$$

לכל $x\in X$ מתקיים ממילא ש$f\left(x\right)\in B$, לכן $f\left(x\right)\in V\cap B$ אם"ם $f\left(x\right)\in V$.

### הערה

למעשה הטענה היא אם"ם כי ודאי שאם $\hat{f}$ רציפה(כהעתקה ל$B$) אזי $f$ היא רציהפ כהעתקה ל$Y$, כי $f=i\circ\hat{f}$

## הגדרה

יהי $X$ מ"ט. $K\subseteq X$ תיקרא סגורה אם $K^{c}$ פתוחה.

## תכונות

מהגדרת טופולוגיה נקבל את התכונות הבאות של קבוצות סגורות:

1. $\emptyset,X$ סגורות
2. אם $\left\{ S_{\alpha}\right\} _{\alpha\in I}$ אוסף <u>כלשהו</u> של קבוצות סגורות אזי $\bigcap\limits_{\alpha\in I}S_{\alpha}$ קבוצה סגורה.
3. אם $S_{1},\dots S_{n}$ אוסף <u>סופי</u> של קבוצות סגורות אזי $\bigcap\limits_{1\le i\le n}S_{i}$ קבוצה סגורה.