חשבון איפני 1 למדמ"ח

בוחן לדוגמא- פתרון

1. הגדירו את המושגים הבאים:

א. הגדרה: פונקציה f נקראת **גזירה בנקודה** $x=c$ אם החלק הסטנדרטי $st\left(\frac{f(c+\vartriangle x)-f(c)}{\vartriangle x}\right)$ כאשר $\vartriangle x\approx 0,\ \vartriangle x\neq 0$ קיים ואינו תלוי ב-$\vartriangle x$.

ב. הגדרה: נקודה $x=c$ נקראת נקודת **אי רציפות מסוג שני** של פונקציה f אם לפחות אחד הגבולות החד צדדיים $\lim_{x\to c^+} f(x)$ או $\lim_{x\to c^-} f(x)$ אינו קיים (או בכלל לא קיים או אינסופי).

ג. הגדרה: מספר היפר ממשי ε נקרא **מספר אינפיניטסימלי** אם $-a<\varepsilon<a$ לכל $a>0$, $a\in\mathbb{R}$.

ד. הגדרה: מספר היפר ממשי H נקרא **אינסופי שלילי** אם $H<a$ לכל $a\in\mathbb{R}$.

.2

א. יהי H אינסופי חיובי, הוכיחו כי e^H אינסופי חיובי.

פתרון: H אינסופי חיובי ולכן לפי הגדרה של מספר אינסופי חיובי $H>a$ לכל $a\in\mathbb{R}$, בפרט $H>\ln b$ לכל $b>0, b\in\mathbb{R}$.

לפי עקרון העברה נקבל $e^H>e^{\ln b}=b$ לכל $b>0, b\in\mathbb{R}$ ולכן $e^H>b$ לכל $b\in\mathbb{R}$ ולכן e^H אינסופי חיובי.

מש"ל

ב. יהיו H,K מספרים אינסופיים חיוביים. האם המספר

$$\frac{H+K}{\sqrt{H^2+K^2}}$$

א. אינפיניטסימלי

ב. סופי שאינו אינפיי

ג. אינסופי

ד. לא ניתן לקבוע.

פתרון: נניח בה"כ (בלי הגבלת הכלליות) $H\geq K>0$

$$\frac{H+K}{\sqrt{H^2+K^2}}=\frac{1+\frac{K}{H}}{\sqrt{1+\left(\frac{K}{H}\right)^2}}$$

מההנחה $H \ge K > 0$ נובע $0 < \frac{K}{H} \le 1$, כלומר $\frac{K}{H}$ הינו מספר סופי חיובי ולכן

גם המונה וגם המכנה של $\frac{1+\frac{K}{H}}{\sqrt{1+\left(\frac{K}{H}\right)^2}} = \frac{H+K}{\sqrt{H^2+K^2}}$ הינם מספרים סופיים שאינם

אינפיניטסימליים ולכן המספר $\frac{H+K}{\sqrt{H^2+K^2}}$ **סופי שאינו איפני'**

3.

א. גזרו את $y=\left(\sin\left(\ln x\right)\right)^x$

פתרון: הפתרון נכון בתחום ההגדרה של הפונקציה, כלומר ב-

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| \sin\left(\ln x\right)>0, x>0\right\}$

$$y=e^{\ln\left(\left(\sin\left(\ln x\right)\right)^x\right)}=e^{x\ln\sin\left(\ln x\right)}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{x\ln\sin\left(\ln x\right)}\left(\ln\left(\sin(\ln x)\right)+\frac{x}{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right)=\left(\sin(\ln x)\right)^x\left(\ln\left(\sin(\ln x)\right)+\cot\left(\ln x\right)\right)$$

ב. מצאו את $\frac{dy}{dx}$ עבור $xy^3=\sqrt{x}+\frac{1}{y}$

פתרון:

$$\frac{d\left(xy^3\right)}{dx}=\frac{d\sqrt{x}}{dx}+\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dx}$$

$$y^3+3xy^2\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

$$\left(3xy^2+\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-y^3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-y^3}{\left(3xy^2+\frac{1}{y^2}\right)}$$

ג. עבור אילו ערכים של a,b הפונקציה

$f\left(x\right)=\begin{cases} ax+b & x\ge 0 \\ \cos x & x<0 \end{cases}$ גזירה לכל $x\in\mathbb{R}$.

פתרון: לכל $x>0$ מתקיים

$st\left(\frac{f(x+\vartriangle x)-f(x)}{\vartriangle x}\right)=st\left(\frac{a(x+\vartriangle x)+b-(ax+b)}{\vartriangle x}\right)=st\left(\frac{a\vartriangle x}{\vartriangle x}\right)=st(a)=a$ כאשר $\vartriangle x\approx 0,\vartriangle x\neq 0$ ולכן $f(x)$ גזירה לכל $x>0$.

לכל $x<0$ מתקיים

$st\left(\frac{f(x+\vartriangle x)-f(x)}{\vartriangle x}\right)=st\left(\frac{\cos(x+\vartriangle x)-\cos x}{\vartriangle x}\right)=-\sin x$ כאשר $\vartriangle x\approx 0,\vartriangle x\neq 0$ ולכן $f(x)$ גזירה לכל $x<0$.

נבדוק האם $f(x)$ גזירה ב- $x=0$.

עבור $\vartriangle x\approx 0,\vartriangle x>0$ נקבל

$$st\left(\frac{f(0+\vartriangle x)-f(0)}{\vartriangle x}\right)=st\left(\frac{a(0+\vartriangle x)+b-b}{\vartriangle x}\right)=st\left(\frac{a\vartriangle x}{\vartriangle x}\right)=st(a)=a$$

עבור $\vartriangle x\approx 0,\vartriangle x<0$ נקבל

$$st\left(\frac{f(0+\vartriangle x)-f(0)}{\vartriangle x}\right)=st\left(\frac{\cos(\vartriangle x)-b}{\vartriangle x}\right)$$

כדי שהביטוי האחרון יהיה סופי חייב להתקיים $\cos(\vartriangle x)-b\approx 0$ כאשר $\vartriangle x\approx 0$ ולכן $b=1$.

במקרה זה נקבל

$$st\left(\frac{f(0+\vartriangle x)-f(0)}{\vartriangle x}\right)=st\left(\frac{\cos(\vartriangle x)-1}{\vartriangle x}\right)=st\left(\frac{\cos(\vartriangle x)-\cos 0}{\vartriangle x}\right)=(\cos x)'\Big|_{x=0}=-\sin 0=0$$

ולכן כדי הפונקציה תהיה גזירה ב- $x=0$ צריך להתקיים $a=0$ ו- $b=1$.

.4

א. מצאו וסווגו את כל נקודות אי הרציפות של הפונקציה $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

פתרון:

$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

בכל הנקודות של תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות.

נקודת אי הרציפות יחידה הינה $x=0$. נבדוק את סוג אי הרציפות בנקודה זו:

$\lim_{x\to 0^-}e^{-\frac{1}{x}}=st\left(e^{-\frac{1}{\vartriangle x}}\right)$ כאשר $\vartriangle x\approx 0,\vartriangle x<0$.

במקרה זה $-\frac{1}{\vartriangle x}$ אינסופי חיובי ולכן $e^{-\frac{1}{\vartriangle x}}$ אינסופי חיובי (הוכחנו בשאלה 2 א')

ולכן החלק הסטנדרטי לא מוגדר, כלומר הגבול משמאל לא קיים ולכן $x=0$ נקודת אי רציפות **מסוג שני**.

ב. תהיינה f,g פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה x_0 (בקטע פתוח מסביב ל- x_0) וכן $f(x)$ רציפה ב- x_0 ו- $g(x)$ אינה רציפה ב- x_0. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם $f\cdot g$ רציפה ב- x_0, אז $f(x_0)=0$

הטענה נכונה

הוכחה :

נניח בשלילה כי $f(x_0)\neq 0$. $f\cdot g$ רציפה ב- x_0 ולכן קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f\cdot g$, וכן מתקיים

$\lim\limits_{x\to x_0} f\cdot g=(f\cdot g)(x_0)=f(x_0)g(x_0)$.

$f(x)$ רציפה בנקודה x_0, ולכן $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\neq 0$.

$\Leftarrow \lim\limits_{x\to x_0} f\cdot g=f(x_0)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)g(x_0)$

מאחר ו- $f(x_0)\neq 0$, נקבל $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ קיים וסופי (כי $\lim\limits_{x\to x_0} f\cdot g$ קיים וסופי וכן $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 0$) וגם

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$

$\Leftarrow g(x)$ רציפה ב- x_0 - סתירה.

2. אם $f(x_0)=0$, אז $f\cdot g$ רציפה ב- x_0.

הטענה לא נכונה.

דוגמא נגדית:

$f(x)=x$ רציפה ב- $x=0$, וכן $f(0)=0$.

$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ אינה רציפה ב- $x=0$, אך מוגדרת ב- $x=0$.

$f\cdot g=\begin{cases}x\cdot\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0\cdot 1 & x=0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ לא רציפה ב- $x=0$.