

## מבוא לתורת החבורות תרגיל בית 9 תשע"ח.

1. מצאו את  $|\text{conj}(\sigma)|$  כאשר  $\sigma = (2573) \in S_{14}$ .

2. קבע האם הפעולות הבאות של חבורה  $G$  על  $\mathbb{R}^2$  היא פעולה של חבורה על קבוצה. באם כן, תארו את המסלול של  $(0, 1)$  ושל  $(1, 1)$ .

$$t * (x, y) = (x + t, y + 2t) \quad G = \mathbb{R} \quad (\text{א})$$

$$t * (x, y) = (tx, t^2x) \quad G = \mathbb{Z} \quad (\text{ב})$$

$$A * (x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad G = \text{GL}_2(\mathbb{R}) \quad (\text{ג})$$

3. תהי  $G$  חבורה שפועלת על קבוצה  $X$ . נגדיר יחס על  $X$  באופן הבא:  $x \sim y$  אם קיים  $g \in G$  כך ש  $gxg^{-1} = y$ .

(א) הוכיחו שזהו אכן יחס שקילות. (הערה: מחלקות השקילות הן המסלולים. כלומר, מחלקת השקילות של  $x$  היא  $\text{orb}(x)$ )

(ב) הוכיחו שאם  $x \sim y$  אז  $\text{stab}(x)$  צמוד ל  $\text{stab}(y)$ , כלומר, קיים  $g$  כך ש  $\text{stab}(x) = g(\text{stab}(y))g^{-1}$ .

4. תהי  $G$  חבורה הפועלת על קבוצה  $X$  ונגדיר

$$G_0 = \{g \in G \mid g * x = x \forall x \in X\}$$

(א) הוכיחו ש  $G_0$  היא תת חבורה של  $G$

(ב) הוכיחו ש  $G_0$  תת חבורה נורמלית.

(ג) נגדיר פעולה של  $G/G_0$  על  $X$  ע"י:  $(gG_0)x = gx$ . הוכיחו שהפעולה מוגדרת היטב, כלומר לא תלויה בבחירת הנציג. (אין צורך להוכיח שזאת אכן פעולה)

(ד) הוכיחו שהפעולה מהסעיף הקודם נאמנה.

5. חשבו את  $stab(x)$  במקרים הבאים:

(א) פועלת על עצמה,  $x$  איבר כלשהו בחבורה.

(ב)  $S_4$  פועלת על פולינומים עם 4 משתנים,  $x$  שווה לפולינום  $x_1 + x_2$ .

6. מצאו את מחלקות הצמידות בחבורה:

(א)  $S_3$ .

(ב)  $D_4$ .

7. תהי  $X$  קבוצת כל הלוחות  $2 \times 2$  שכל ריבוע שלהם צבוע באחד משני הצבעים שחור/לבן. שימו לב שיש  $2^4 = 16$  לוחות כאלה. ניקח  $G = \mathbb{Z}_4$  ונגדיר פעולה באופן הבא: לכל  $a \in \mathbb{Z}_4$  הלוח המתקבל  $a * x$  הוא סיבוב הלוח  $x$  ב  $90 \cdot a$  מעלות. מצאו את כל המסלולים (מה האיברים בכל מסלול?). כמה מסלולים יש?