מבחן דמה – מבוא לאנליזה 1 למורים

משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin^2(x)\right)\cdot e^{\sin(x)}}{x\cdot\ln(1+x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin^2(x)\right)\cdot e^{\sin(x)}}{x\cdot\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}e^{\sin(x)}\cdot\frac{\sin\left(\sin^2(x)\right)}{\sin^2(x)}\cdot\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{\ln\left(1+x\right)}=1$$

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}\overset{\infty^0}{=}\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln\left(x+1\right)}{x}}\underset{\downarrow}{=}e^0=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+1\right)}{x}\underset{L'\text{Hopital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=0$$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}}{3^{4n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}}{3^{4n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{3^4}\right)^n\overset{\infty^\infty}{=}\infty$$

2. נביט בפונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)-x}{x^3} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$

א. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$? אחרת, איזה סוג אי רציפות יש ב $x=0$?

ראשית נחשב את הגבול בנקודה $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3}\cdot\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{-1}{6}$$

לכן אם $a=\frac{-1}{6}$ הפונקציה רציפה, ואחרת ישנה אי רציפות סליקה.

ב. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלה?

אם הפונקציה אינה רציפה ב $x=0$, וודאי אינה גזירה שם.

לכן נבדוק גזירות **לפי ההגדרה** ב $x=0$, כאשר $a=\frac{-1}{6}$.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(h)-h}{h^3}-\frac{-1}{6}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6\sin(h)-6h+h^3}{h^4}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{6\cos(h)-6+3h^2}{4h^3}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-6\sin(h)+6h}{12h^2}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{-6\cos(h)+6}{24h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos(h)}{h}=0$$

לכן f גזירה ב $x=0$, כאשר $a=\frac{-1}{6}$ והנגזרת בנקודה הינה $f'(0)=0$.

3. תהי f פונקציה רציפה בכל הממשיים כך ש $f(0)=1$ ולכל x מתקיים כי $f(x)\neq x$

א. הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x)=f(x)-x$. פונקציה זו רציפה בכל הממשיים כסכום של רציפות.

כעת ידוע כי לכל x מתקיים כי $h(x)\neq 0$ ולכן $h(x)$ בעלת סימן קבוע, אחרת לפי משפט ערך הביניים היא הייתה צריכה לחתוך את הציר.

כיוון ש $h(0)=f(0)-0=1$, נובע כי $h(x)>0$ לכל x.

כלומר, לכל x מתקיים כי $f(x)>x$ ולכן לפי חצי סנדוויץ' ברור כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

(סיכום הפתרון במילים אחרות: הפונקציה $f(x)$ נמצאת מעל הפונקציה x בנקודה 0 ולעולם לא חותכת אותה. לכן היא תמיד מעליה [רציפות] ולכן שואפת גם היא לאינסוף).

ב. נניח בנוסף כי f גזירה בכל הממשיים. הוכיחו/הפריכו: $f'(x)\geq 1$ לכל x

למעשה אנו שואלים האם בהנתן שפונקציה אחת תמיד גדולה מפונקציה שנייה, אפשר להסיק כי הנגזרת של הראשונה גדולה או שווה לשנייה.

קל יותר להעביר אגף, ולשאול האם הפונקציה החיובית $h(x)>0$ חייבת לקיים $h'(x)=f'(x)-1\geq 0$.

אבל פונקציה חיובית לא צריכה להיות עולה, למשל e^{-x} חיובית ויורדת.

מכאן מצאנו <u>הפרכה</u>: $f(x)=x+e^{-x}$. אכן $f(x)\neq x$, $f(0)=1$ וכמו כן $f'(x)=1-e^{-x}<1$.

4. תהי f פונקציה רציפה, גזירה וחיובית בכל הממשיים, כך ש $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$.

א. הוכיחו כי $f(0)=1$.

ראשית f גזירה ב $x=0$ ולכן רציפה שם, כלומר $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$.

כעת

$$f(0)-1=\lim_{x\to 0}\left(f(x)-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}\cdot x\overset{f'(0)\cdot 0}{=}0$$

נתון <u>בנוסף</u> כי קיימת נק' $0<x_0$ עבורה $\ln\left(f(x_0)\right)=x_0$.

ב. הוכיחו כי קיימת נקודה c עבורה $f'(c)=f(c)$

נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x)=\ln\left(f(x)\right)-x$ (הפונקציה מוגדרת כיוון שנתון כי f חיובית).

ידוע כי $h(0)=\ln(1)-0=0$ וכמו כן $h(x_0)=0$.

h רציפה וגזירה בכל הממשיים כצירוף של גזירות ולכן לפי משפט רול קיימת נקודה $0<c<x_0$ עבורה

$h'(c)=0$.

לכן $0=h'(c)=\frac{f'(c)}{f(c)}-1$ ומכאן $f'(c)=f(c)$.

.5

א. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים $\ln(1+x)<x$.

יהי $x>0$.

נפעיל את משפט לאגראנז' על הפונקציה הגזירה (ולכן רציפה) $\ln(1+x)$ בקטע $[0,x]$.

קיימת נקודה $0<c<x$ עבורה $\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}=\frac{1}{1+c}$.

כיוון ש $0<c<x$ נובע כי $\frac{1}{1+c}<\frac{1}{1+0}=1$.

ביחד $\frac{\ln(1+x)}{x}<1$ נכפול במספר החיובי x ונקבל $\ln(1+x)<x$.

ב. נביט בסדרה a_n המוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה $a_{n+1}=\ln(1+a_n)$ ותנאי ההתחלה $a_1=1$.

הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת ומצאו את גבולה.

אנו רוצים להשתמש באי השיוויון מסעיף א', שנכון לגבי מספרים חיוביים.

לכן נוכיח באינדוקציה כי הסדרה הזו חיובית.

עבור $n=1$ מתקיים כי $a_1=1>0$. יהי n עבורו $a_n>0$ צריך להוכיח כי $a_{n+1}>0$.

אכן $a_{n+1}=\ln\left(1+a_n\right)>\ln(1)=0$.

כעת, לכל n מתקיים כי $a_{n+1}=\ln\left(1+a_n\right)>a_n$ לפי סעיף א', כלומר מדובר בסדרה מונוטונית עולה.

אם a_n חסומה, אזי היא מתכנסת לגבול סופי $a_n\to L$. כיוון שהסדרה עולה ומתחילה ב1, נובע כי $L\geq 1$.

כיוון שלכל n מתקיים $a_{n+1}=\ln(1+a_n)$, נשאיף את שני הצדדים לאינסוף ונקבל כי $L=\ln\left(1+L\right)$ בסתירה

לסעיף א'. לכן מדובר בסדרה עולה שאינה חסומה, ולכן $a_n\to\infty$.