# <u>עבודה־ סדנה למחקר</u>

הראל רוזנפלד
302529789
harelrozen@gmail.com

7 במאי 2019

## <u>מורדות בתמורה:</u>

<u>הגדרה:</u>

מורד בתמורה $\pi \in S_n$ הוא $1 \leq \mathrm{i} \leq n-1$ המקיים $\pi(i) > \pi(i+1)$.

נסמן ב־ $\varphi(n,k)$ את מספר התמורות עם $k$ מורדות ב־ $S_n$.

<u>טענה:</u>

לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $0 \leq k \leq n$: $\varphi(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k+1-i)^n$.
(לצורך ההוכחה נסמן: $w(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k+1-i)^n$).

<u>מוטיבציה:</u>

בחישובים מפורשים עבור $k = 1,2$ התקבלו התוצאות הבאות:

$\varphi(n,1) = 2^{\mathrm{n}} - \binom{n+1}{1}$, $\varphi(n,2) = 3^{\mathrm{n}} - \binom{n+1}{1} 2^n + \binom{n+1}{2}$.

ומהן ניתן לשער את הנוסחה המובאת לעיל. ניסויי מחשב במספרים נמוכים מאששים את ההשערה.

<u>טענת עזר 1:</u>

לכל $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(k,n) = w(k,n)$ עבור $k = 0, n$.

<u>הוכחה:</u>

$k = 0$: $w(n,0) = (-1)^0 \binom{n+1}{0} (0+1-0)^n = 1$, ואכן, התמורה היחידה ב־ $S_n$ בלי מורדות כלל היא תמורת הזהות, ובפרט $\varphi(0,n) = 1$.

$k = n$: באינדוקציה על $n$ נקבל: $w(n,n) = 0$, ואכן, לפי הגדרה בתמורה ב־ $S_n$ יש לכל היותר $n-1$ מורדות , ובפרט $\varphi(n,n) = 0$.

הערה: באופן דומה, לכל $k > n$: $\varphi(n,k) = 0$.

טענת עזר 2:

לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $1 \le k \le n$:

$\varphi(n+1,k) = (n+1-k)\varphi(n,k-1) + (k+1)\varphi(n,k)$.

הוכחה:

נסמן: $\phi(n,k) = \{\pi \in S_n | \pi\, has\, k\, descent\}$, ונגדיר פונקציה:

$G : \phi(n+1,k) \longrightarrow \phi(n,k-1) \cup \phi(n,k)$ על־ידי: $\pi \longmapsto \pi(\overline{n+1})$

כאשר $\pi(\overline{n+1})$ היא התמורה המתקבלת מ־ $\pi$ על־ידי מחיקת האיבר $n+1$. $G$ מוגדרת היטב כיוון ש־ $\pi(\overline{n+1}) \in S_n$, וכן יש בה אותו מספר מורדות כמו ב־ $\pi$ או אחד פחות ולכן: $\pi(\overline{n+1}) \in \phi(n,k-1) \cup \phi(n,k)$.

נחשב את גודל התמונה ההפוכה של כל $\pi \in \phi(n,k-1) \cup \phi(n,k)$:

$\pi \in \phi(n,k-1)$: צריך "להכניס" את $n+1$ במקום כלשהו בתמורה כך שיתווסף לתמורה מורד חדש, ולכן צריך "להכניס" אותו במקום בו אין מורד, כלומר בין $i$ ל־ $i+1$ המקיימים $\pi(i) < \pi(i+1)$, וכיוון שב־ $\pi$ יש $k-1$ מורדות ו־ $n$ אפשרויות "להכניס" את $n+1$ (הוספה אחרי האיבר האחרון ודאי לא מוסיפה מורד), נקבל שיש $n-(k-1) = n+1-k$ מקומות להכניס את $n+1$ כך שנקבל תמורה ב־ $S_{n+1}$ עם $k$ מורדות, ולכן זהו גודל התמונה ההפוכה של $\pi$.

$\pi \in \phi(n,k)$: צריך "להכניס" את $n+1$ במקום כלשהו בתמורה כך שלא יתווסף לתמורה מורד חדש, ולכן צריך "להכניס" אותו במקום בו כבר יש מורד, כלומר בין $i$ ל־ $i+1$ המקיימים $\pi(i) > \pi(i+1)$, וכיוון שב־ $\pi$ יש $k$ מורדות, וכן "הכנסה" אחרי האיבר האחרון לא מוסיפה מורד, נקבל שיש $k+1$ מקומות להכניס את $n+1$ כך שנקבל תמורה ב־ $S_{n+1}$ עם $k$ מורדות, ולכן זהו גודל התמונה ההפוכה של $\pi$.

כעת:

$$\varphi(n+1,k) =| \phi(n+1,k) |=$$
$$\textstyle\sum_{\pi \in \phi(n,k-1)\cup\phi(n,k)} |G^{-1}(\pi)| =$$
$$(n+1-k)|\phi(n,k-1)| + (k+1)|\phi(n,k)| =$$
$$(n+1-k)\varphi(n,k-1) + (k+1)\varphi(n,k)$$

כדרוש.

הוכחת הטענה(באינדוקציה):

נתבונן במשולש:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \varphi(1,0) \quad \varphi(1,1) \\ \varphi(2,0) \quad \varphi(2,1) \quad \varphi(2,2) \\ \varphi(3,0) \quad \varphi(3,1) \quad \varphi(3,2) \quad \varphi(3,3) \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \end{array}$$

לפי טענת עזר 1, האלכסון השמאלי $(k=0)$ קבוע־1, והימני $(k=n)$ קבוע־ 0, וכן $\varphi(2,1)=1=w(2,1)$, כיוון שיש תמורה אחת עם מורד אחד ב־ $S_2$ (21). לכן הרישא של המשולש $\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ מקיימת $\varphi(n,k)=w(n,k)$.

כעת, נניח כי $\varphi(n,k)=w(n,k)$ עד השורה ה־ $n$, ונוכיח נכונות עבור השורה ה־ $n+1$.

מטענת עזר 1: $\varphi(n+1,0)=w(n+1,0), \varphi(n+1,n+1)=w(n+1,n+1)$, ולכן נותר להוכיח עבור $1\le k\le n$. יהי $k$ כנ"ל.

לפי טענת עזר 2 והנחת האינדוקציה:

$$\varphi(n+1,k)=(n+1-k)\varphi(n,k-1)+(k+1)\varphi(n,k)=$$
$$(n+1-k)w(n,k-1)+(k+1)w(n,k)=$$
$$(n+1-k)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k-1+1-i)^n+$$
$$+(k+1)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k+1-i)^n=$$
$$(n+1-k)\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{n+1}{i-1}(k+1-i)^n+$$
$$+(k+1)\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k+1-i)^n+(k+1)^{n+1}=$$
$$\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}(n+1-k)\binom{n+1}{i-1}+(-1)^i(k+1)\binom{n+1}{i}\right](k+1-i)^n+$$
$$+(k+1)^{n+1}$$

נפשט את הביטוי בסוגריים המרובעות:

$$(-1)^{i-1}(n+1-k)\binom{n+1}{i-1}+(-1)^i(k+1)\binom{n+1}{i}=$$
$$(-1)^{i-1}(n+1-k)\left[\binom{n+2}{i}-\binom{n+1}{i}\right]+(-1)^i(k+1)\binom{n+1}{i}=$$
$$(-1)^{i-1}(n+1-k)\binom{n+2}{i}+(-1)^i(n+2)\binom{n+1}{i}=.$$
$$(-1)^{i-1}(n+1-k)\binom{n+2}{i}+(-1)^i(n+2-i)\binom{n+2}{i}=$$
$$(-1)^i(k+1-i)\binom{n+2}{i}$$

נציב חזרה ונקבל:

$$\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^i(k+1-i)\binom{n+2}{i}\right](k+1-i)^n+(k+1)^{n+1}=$$
$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{n+2}{i}(k+1-i)^{n+1}+(k+1)^{n+1}=$$
$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+2}{i}(k+1-i)^{n+1}=w(n+1,k)$$

אזי $\varphi(n+1,k)=w(n+1,k)$, כדרוש.

הערה: המספר שסומן ב־ $\varphi(n,k)$ נקרא מספר האוילריאן, ומסומן בדר"כ בסימון־ $\left\langle \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\rangle$.
המספר הוגדר ע"י אוילר (כמקדמי פולינום האוילריאן) ללא הקשר קומבינטורי. במאה ה־20

הוכח כי $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$ הוא מספר התמורות עם $k$ מורדות ב־$S_n$. מאוחר יותר נמצא כי המספר קשור לתחומים נוספים במתמטיקה, וכן ישנן מספר הכללות שלו.

## מטריצות ב־ $M_n(\mathbb{N}\cup\{0\})$ עם סכום שורות ועמודות 2:

נסמן ב־ $M_{n\times n}(d)$ את קבוצת המטריצות מסדר $n\times n$ שאבריהן מספרים שלמים אי שליליים, וסכום כל שורה ועמודה הוא $d$.

טענה:

$|M_{n\times n}(2)|$ מוגדר ע"י נוסחת הנסיגה: $a_n = n^2a_{n-1} - 0.5n(n-1)^2a_{n-2}$.

הוכחה:

כל מטריצה ב־ $M_{n\times n}(1)$ ניתן לתאר ע"י תמורה $\sigma\in S_n$ לפי: $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \sigma(i)=j \\ 0 & otherwish \end{cases}$

נגדיר פונקציה $F: M_{n\times n}(1)\times M_{n\times n}(1) \longrightarrow M_{n\times n}(2)$ ע"י חיבור של המטריצות. קל לראות שאכן מתקבלת מטריצה ב־ $M_{n\times n}(2)$ וכן כי $F$ על. כעת ניתן לתאר כל מטריצה ב־ $M_{n\times n}(2)$ ע"י זוג תמורות אך לא באופן יחיד.

דוג': $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ מתוארת ע"י הזוגות $\begin{pmatrix} \sigma = id \\ \tau = (12)(34) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sigma = (12)(3)(4) \\ \tau = (1)(2)(34) \end{pmatrix}$.

נרצה להבין כמה יצוגים שונים ישנם לכל מטריצה, ונתחיל במטריצות המיוצגות ע"י $(id,\sigma)$ עבור $\sigma\in S_n$ כלשהי.

יהי $\pi$ מחזור של $\sigma$, נגדיר זוג תמורות חדשות: $(\pi,\sigma')$, כאשר $\pi$ היא המחזור $\pi$ וכל שאר האיברים הם נקודות שבת, ו־$\sigma'$ היא התמורה המתקבלת מ־$\sigma$ ע"י הפיכת האיברים ב־$\pi$ לנקודות שבת. ע"י כתיבת התמורות כרשימה קל לראות שהזוגות $(id,\sigma)$ ו־ $(\pi,\sigma')$ מייצגים אותה מטריצה.

דוג': $\sigma = (145)(23)(6)(78)$, $\pi = (145)$ אזי $\begin{pmatrix} \pi = (145)(2)(3)(6)(7)(8) \\ \sigma' = (1)(23)(4)(5)(6)(78) \end{pmatrix}$. נכתוב כרשימה: $\begin{pmatrix} id = 12345678 \\ \sigma = 43251687 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pi = 42351678 \\ \sigma' = 13245687 \end{pmatrix}$, האיברים בעמודה ה־ $i$ הם המקומות בשורה ה־ $i$ במטריצה בהם יש 1. (אם הם שווים אז באותו מקום מופיע $2 = 1{+}1$), ואכן שני הזוגות מייצגים אותה מטריצה.

נשים לב שלכל מחזור $\pi$ של $\sigma$ ניתן לבצע זאת באופן בלתי תלוי בשאר המחזורים, ולכן כל בחירה של קבוצת מחזורים ב־ $\sigma$ מגדירה זוג תמורות חדש המייצג את אותה מטריצה. (כאשר $\pi$ מחזור באורך$\leq 2$, כיוון שביצוע הפעולה על נקודות שבת איננה משנה את הזוג $(id,\sigma)$). מאידך, אם זוג תמורות $(\tau,\delta)$ מייצג אותה מטריצה, אזי לכל $x\in\{1,...,n\}$:

$x = \tau(x)$ או $\delta(x) = x$ (כי כל איבר באלכסון המטריצה המיוצגת ע"י $(id, \sigma)$ שונה מ־ 0).
כעת לכל מחזור באורך$\leq 2$ ב־ $\tau$, איברי המחזור הם נקודות שבת ב־ $\delta$, ולכן נוכל לבצע את אותה פעולה לעיל על כל מחזורי $\tau$ כך שיתקבל זוג התמורות $(id, \delta')$. כיוון שהוא מייצג אותה מטריצה כמו $(id, \sigma)$ אז $\sigma = \delta'$, וע"י ביצוע הפעולה ההפוכה על $(id, \sigma)$ (כלומר, "החזרת" המחזורים ש"נלקחו" מ־ $\tau$), נקבל את הזוג $(\tau, \delta)$. לכן, ביצוע הפעולה המתוארת לעיל על כל תת קבוצה של מחזורים באורך $\leq 2$ של $\sigma$ נותן את כל זוגות התמורות המייצגים אותה מטריצה כמו $(id, \sigma)$.

נסמן ב־ $k_\sigma$ את מספר המחזורים באורך$\leq 2$ ב־ $\sigma$, ונקבל כי מספר ההצגות של המטריצה הוא $2^{k_\sigma}$ (מספר תתי הקבוצות של מחזורים באורך$\leq 2$). כעת, לכל $\sigma \in S_n$ "המשקל היחסי" של הזוג $(id, \sigma)$ במטריצה שהוא מייצג הוא $2^{-k_\sigma}$. נסכום על כל $\sigma \in S_n$, ונקבל כי "המשקל היחסי הכולל" של $id$ בכל המטריצות המיוצגות באמצעותו (ובאמצעות $\sigma \in S_n$ כלשהי) הוא $\sum\limits_{\sigma \in S_n} 2^{-k_\sigma}$. מסימטריה, זה נכון לכל $\sigma \in S_n$, ולכן $|M_{n\times n}(2)| = n!\sum\limits_{\sigma\in S_n} 2^{-k_\sigma}$.
(מטריצה המיוצגת ע"י $2^{k_\sigma}$ זוגות נסכמת $2^{k_\sigma}$ פעמים עם משקל $2^{-k_\sigma}$ ובסה"כ נספרת פעם אחת).

נסמן: $b_n = \sum\limits_{\sigma\in S_n} 2^{-k_\sigma}$.

<u>טענת עזר:</u>

$b_n$ מוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה: $b_n = nb_{n-1} - 0.5(n-1)b_{n-2}$.

<u>הוכחה:</u>

כל $\sigma \in S_n$ (בהצגה מחזורית) מתקבלת ע"י "הכנסת" $n$ למחזור כלשהו ב־ $\sigma' \in S_{n-1}$ או הוספתו ל־ $\sigma'$ כנקודת שבת. נחלק למקרים:

אם הוספנו את $n$ למחזור באורך 1 (נקודת שבת) נקבל שמספר המחזורים באורך$\leq 2$ גדל ב־ 1, כלומר, $k_\sigma = k_{\sigma'} + 1$. אחרת, מספר המחזורים באורך$\leq 2$ נותר זהה, ואז $k_\sigma = k_{\sigma'}$. לכל $\sigma' \in S_{n-1}$ יש $n$ מקומות אפשריים להוסיף את $n$, ולכן נקבל $\sum\limits_{\sigma\in S_n} 2^{-k_\sigma} = n\sum\limits_{\sigma'\in S_{n-1}} 2^{-k_{\sigma'}} - c$.
כאשר $c$ הוא ההפרש שמתקבל מתמורות מהסוג הראשון. נחשב אותו:

תמורות מהסוג הראשון הן תמורות בהן $n$ נמצא במחזור באורך 2. יש $n-1$ אפשרויות לבחור חבר למחזור ל־ $n$, ובכל בחירה יש $(n-2)!$ אפשרויות לסדר את שאר האיברים, כאשר כל בחירה מתאימה ל־ $\sigma'' \in S_{n-2}$, ומתקיים: $k_\sigma = k_{\sigma''} + 1$ (כי נוסף מחזור אחד באורך 2), לכן בסה"כ הסכום המבוקש על תמורות מסוג זה הוא:

$(n-1)\sum\limits_{\sigma''\in S_{n-2}} 2^{-(k_{\sigma''}+1)} = 0.5(n-1)\sum\limits_{\sigma''\in S_{n-2}} 2^{-k_{\sigma''}}$. נשים לב שכל תמורה מהסוג הראשון סכמנו עם ערך $2^{-k_{\sigma'}}$ במקום $2^{-(k_{\sigma'}+1)}$, ובסה"כ סכמנו את התרומה הכוללת של תמורות מסוג זה כפול מהנדרש, ולכן ההפרש $c$ אותו נחסר הוא בדיוק התרומה הכוללת אותה חישבנו, כלומר, $c = 0.5(n-1)\sum\limits_{\sigma''\in S_{n-2}} 2^{-k_{\sigma''}}$, ולכן: $\sum\limits_{\sigma\in S_n} 2^{-k_\sigma} = n\sum\limits_{\sigma'\in S_{n-1}} 2^{-k_{\sigma'}} - 0.5(n-1)\sum\limits_{\sigma''\in S_{n-2}} 2^{-k_{\sigma''}}$.

אזי, $b_n = nb_{n-1} - 0.5(n-1)b_{n-2}$.

כעת, נסמן: $a_n = |M_{n\times n}(2)| = n!\sum_{\sigma\in S_n} 2^{-k_\sigma}$, אזי: $a_n = n!b_n$.

נכפול את נוסחת הנסיגה של $b_n$ ב־ $n!$ ונקבל: $n!b_n = n!nb_{n-1} - 0.5n!(n-1)b_{n-2}$.

כלומר: $n!b_n = n^2(n-1)!b_{n-1} - 0.5n(n-1)^2(n-2)!b_{n-2}$, נציב את $a_n$ ונקבל:

$a_n = n^2a_{n-1} - 0.5n(n-1)^2a_{n-2}$, כדרוש.

הערה: אנציקלופדיית הסדרות $OEIS$ מציעה מספר נוסחות נוספות לחישוב $|M_{n\times n}(2)|$, אולם עפ"י האנציקלופדיה, אין נוסחה סגורה לחישוב. עפ"י האנציקלופדיה, בשנת 2004 מצא מתמטיקאי צרפתי חובב בשם $Benoit\, Cloitre$ כי $|M_{n\times n}(2)|$ אסימפטוטי ל־ $\frac{c\cdot n!^2}{\sqrt{n}}$, כאשר $c = 0.93019..$, ובשנת 2013 הראה $Vaclav\, Kotesovec$ כי $c = \frac{e^{0.5}}{\sqrt{\pi}}$. לאחר מכן נעשו חישבים מדוייקים אף יותר. (לא הצלחתי למצוא את המאמרים הרלוונטיים ברשת).