מורדות בתמורה:

הגדרה:

מורד בתמורה $\pi \in S_n$ הוא $1 \le \mathrm{i} \le n-1$ המקיים $\pi(i) > \pi(i+1)$.

נסמן ב־ $\varphi(n,k)$ את מספר התמורות עם k מורדות ב־ S_n.

טענה:

לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $0 \le k \le n$: $\varphi(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k+1-i)^n$.
(לצורך ההוכחה נסמן: $w(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k+1-i)^n$).

מוטיבציה:

בחישובים מפורשים עבור $k = 1,2$ התקבלו התוצאות הבאות:

$\varphi(n,1) = 2^{\mathrm{n}} - \binom{n+1}{1}$, $\varphi(n,2) = 3^{\mathrm{n}} - \binom{n+1}{1} 2^n + \binom{n+1}{2}$,

ומהן ניתן לשער את הנוסחה המובאת לעיל. ניסויי מחשב במספרים נמוכים מאששים את ההשערה.

טענת עזר 1:

לכל $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(k,n) = w(k,n)$ עבור $k = 0, n$.

הוכחה:

$k = 0$: $w(n,0) = (-1)^0 \binom{n+1}{0} (0+1-0)^n = 1$, ואכן, התמורה היחידה ב־ S_n בלי מורדות כלל היא תמורת הזהות, ובפרט $\varphi(0,n) = 1$.

$k = n$: באינדוקציה על n נקבל: $w(n,n) = 0$, ואכן, לפי הגדרה בתמורה ב־ S_n יש לכל היותר $n-1$ מורדות , ובפרט $\varphi(n,n) = 0$.

הערה: באופן דומה, לכל $k > n$: $\varphi(n,k) = 0$.

טענת עזר 2:

לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $1 \le k \le n$:

$\varphi(n+1,k) = (n+1-k)\varphi(n,k-1) + (k+1)\varphi(n,k)$.

הוכחה:

נסמן: $\phi(n,k) = \{\pi \in S_n | \pi \, has \, k \, descent\}$, ונגדיר פונקציה:

$G : \phi(n+1,k) \longrightarrow \phi(n,k-1) \cup \phi(n,k)$ על־ידי: $\pi \longmapsto \pi(\overline{n+1})$

כאשר $\pi(\overline{n+1})$ היא התמורה המתקבלת מ־ π על־ידי מחיקת האיבר $n+1$. G מוגדרת היטב כיוון ש־ $\pi(\overline{n+1}) \in S_n$, וכן יש בה אותו מספר מורדות כמו ב־ π או אחד פחות ולכן: $\pi(\overline{n+1}) \in \phi(n,k-1) \cup \phi(n,k)$.

נחשב את גודל התמונה ההפוכה של כל $\pi \in \phi(n,k-1) \cup \phi(n,k)$:

$\pi \in \phi(n,k-1)$: צריך "להכניס" את $n+1$ במקום כלשהו בתמורה כך שיתווסף לתמורה מורד חדש, ולכן צריך "להכניס" אותו במקום בו אין מורד, כלומר בין i ל־ $i+1$ המקיימים $\pi(i) < \pi(i+1)$, וכיוון שב־ π יש $k-1$ מורדות ו־ n אפשרויות "להכניס" את $n+1$ (הוספה אחרי האיבר האחרון ודאי לא מוסיפה מורד), נקבל שיש $n-(k-1) = n+1-k$ מקומות להכניס את $n+1$ כך שנקבל תמורה ב־ S_{n+1} עם k מורדות, ולכן זהו גודל התמונה ההפוכה של π.

$\pi \in \phi(n,k)$: צריך "להכניס" את $n+1$ במקום כלשהו בתמורה כך שלא יתווסף לתמורה מורד חדש, ולכן צריך "להכניס" אותו במקום בו כבר יש מורד, כלומר בין i ל־ $i+1$ המקיימים $\pi(i) > \pi(i+1)$, וכיוון שב־ π יש k מורדות, וכן "הכנסה" אחרי האיבר האחרון לא מוסיפה מורד, נקבל שיש $k+1$ מקומות להכניס את $n+1$ כך שנקבל תמורה ב־ S_{n+1} עם k מורדות, ולכן זהו גודל התמונה ההפוכה של π.

כעת:

$$\varphi(n+1,k) = \mid \phi(n+1,k) \mid =$$

$$\textstyle\sum_{\pi \in \phi(n,k-1) \cup \phi(n,k)} |G^{-1}(\pi)| =$$

$$(n+1-k)|\phi(n,k-1)| + (k+1)|\phi(n,k)| =$$

$$(n+1-k)\varphi(n,k-1) + (k+1)\varphi(n,k)$$

כדרוש.

<u>הוכחת הטענה(באינדוקציה):</u>

נתבונן במשולש:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & \varphi(1,0) & & \varphi(1,1) & & \\
 & \varphi(2,0) & & \varphi(2,1) & & \varphi(2,2) & \\
\varphi(3,0) & & \varphi(3,1) & & \varphi(3,2) & & \varphi(3,3)
\end{array}$$

$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$

$- -$

לפי טענת עזר 1, האלכסון השמאלי ($k=0$) קבוע־1, והימני ($k=n$) קבוע־ 0, וכן $\varphi(2,1) = 1 = w(2,1)$, כיוון שיש תמורה אחת עם מורד אחד ב־ S_2 (21). לכן הרישא של המשולש $\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & & 1 & & 0 \end{array}$ מקיימת $\varphi(n,k) = w(n,k)$.

כעת, נניח כי $\varphi(n,k) = w(n,k)$ עד השורה ה־ n, ונוכיח נכונות עבור השורה ה־ $n+1$.

מטענת עזר 1: $\varphi(n+1,0) = w(n+1,0), \varphi(n+1,n+1) = w(n+1,n+1)$, ולכן נותר להוכיח עבור $1 \leq k \leq n$. יהי k כנ"ל.

לפי טענת עזר 2 והנחת האינדוקציה:

$$\varphi(n+1,k) = (n+1-k)\varphi(n,k-1) + (k+1)\varphi(n,k) =$$

$$(n+1-k)w(n,k-1) + (k+1)w(n,k) =$$

$$(n+1-k)\textstyle\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k-1+1-i)^n +$$

$$+(k+1)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k+1-i)^n =$$
$$(n+1-k)\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{n+1}{i-1}(k+1-i)^n+$$
$$+(k+1)\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k+1-i)^n+(k+1)^{n+1} =$$
$$\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}(n+1-k)\binom{n+1}{i-1}+(-1)^i(k+1)\binom{n+1}{i}\right](k+1-i)^n+$$
$$+(k+1)^{n+1}$$

נפשט את הביטוי בסוגריים המרובעות:

$$(-1)^{i-1}(n+1-k)\binom{n+1}{i-1}+(-1)^i(k+1)\binom{n+1}{i} =$$
$$(-1)^{i-1}(n+1-k)\left[\binom{n+2}{i}-\binom{n+1}{i}\right]+(-1)^i(k+1)\binom{n+1}{i} =$$
$$.(-1)^{i-1}(n+1-k)\binom{n+2}{i}+(-1)^i(n+2)\binom{n+1}{i} =$$
$$(-1)^{i-1}(n+1-k)\binom{n+2}{i}+(-1)^i(n+2-i)\binom{n+2}{i} =$$
$$(-1)^i(k+1-i)\binom{n+2}{i}$$

נציב חזרה ונקבל:

$$\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^i(k+1-i)\binom{n+2}{i}\right](k+1-i)^n+(k+1)^{n+1} =$$
$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{n+2}{i}(k+1-i)^{n+1}+(k+1)^{n+1} =$$
$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+2}{i}(k+1-i)^{n+1}=w(n+1,k)$$

אזי $\varphi(n+1,k)=w(n+1,k)$, כדרוש.

הערה: המספר שסומן ב־ $\varphi(n,k)$ נקרא מספר האוילריאן, ומסומן בדר"כ בסימון־ $\left\langle \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\rangle$. המספר הוגדר ע"י אוילר בדרך לא קומבינטורית. $Macmahon$ הוכיח את הנוסחה למספר התמורות עם k מורדות ב־S_n, ככל הנראה בלי מודעות לעבודתו של אוילר. ב־1953 הראו $Carlitz$ ו־ $Riordan$ כי זהו בדיוק המספר כפי שהוגדר ע"י אוילר, ובהמשך נמצא כי המספר קשור לתחומים נוספים במתמטיקה וכן ישנן מספר הכללות שלו.

מטריצות ב־ $M_n(\mathbb{N}\cup\{0\})$ עם סכום שורות ועמודות 2:

נסמן ב־ $M_{n\times n}(d)$ את קבוצת המטריצות מסדר $n\times n$ שאבריהן מספרים שלמים אי שליליים, וסכום כל שורה ועמודה הוא d.

<u>טענה:</u>

$|M_{n\times n}(2)|$ מוגדר ע"י נוסחת הנסיגה: $a_n=n^2a_{n-1}-0.5n(n-1)^2a_{n-2}$.

<u>הוכחה:</u>

כל מטריצה ב־ $M_{n\times n}(1)$ ניתן לתאר ע"י תמורה $\sigma\in S_n$ לפי: $a_{ij}=\begin{cases}1 & \sigma(i)=j\\ 0 & otherwish\end{cases}$

נגדיר פונקציה $F:M_{n\times n}(1)\times M_{n\times n}(1)\longrightarrow M_{n\times n}(2)$ ע"י חיבור של המטריצות. קל לראות שאכן מתקבלת מטריצה ב־ $M_{n\times n}(2)$ וכן כי F על. כעת ניתן לתאר כל מטריצה ב־ $M_{n\times n}(2)$ ע"י זוג תמורות אך לא באופן יחיד.

דוג': $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ מתוארת ע"י הזוגות $\begin{pmatrix}\sigma=id\\ \tau=(12)(34)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\sigma=(12)(3)(4)\\ \tau=(1)(2)(34)\end{pmatrix}$.

נרצה להבין כמה יצוגים שונים ישנם לכל מטריצה, ונתחיל במטריצות המיוצגות ע"י (id,σ) עבור $\sigma\in S_n$ כלשהי.

יהי π מחזור של σ, נגדיר זוג תמורות חדשות: (π,σ'), כאשר π היא המחזור π וכל שאר האיברים הם נקודות שבת, ו־σ' היא התמורה המתקבלת מ־σ ע"י הפיכת האיברים ב־π לנקודות שבת. ע"י כתיבת התמורות כרשימה קל לראות שהזוגות (id,σ) ו־ (π,σ') מייצגים אותה מטריצה.

דוג': $\sigma=(145)(23)(6)(78)$, $\pi=(145)$ אזי $\begin{pmatrix}\pi=(145)(2)(3)(6)(7)(8)\\ \sigma'=(1)(23)(4)(5)(6)(78)\end{pmatrix}$. נכתוב כרשימה: $\begin{pmatrix}id=12345678\\ \sigma=43251687\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\pi=42351678\\ \sigma'=13245687\end{pmatrix}$, האיברים בעמודה ה־ i הם המקומות בשורה ה־ i במטריצה בהם יש 1. (אם הם שווים אז באותו מקום מופיע $2=1+1$), ואכן שני הזוגות מייצגים אותה מטריצה.

נשים לב שלכל מחזור π של σ ניתן לבצע זאת באופן בלתי תלוי בשאר המחזורים, ולכן כל בחירה של קבוצת מחזורים ב־ σ מגדירה זוג תמורות חדש המייצג את אותה מטריצה. (כאשר π מחזור באורך≤ 2, כיוון שביצוע הפעולה על נקודות שבת איננה משנה את הזוג (id,σ)). מאידך, אם זוג תמורות (τ,δ) מייצג אותה מטריצה, אזי לכל $x\in\{1,...,n\}$: $\tau(x)=x$ או $\delta(x)=x$ (כי כל איבר באלכסון המטריצה המיוצגת ע"י (id,σ) שונה מ־ 0). כעת לכל מחזור באורך≤ 2 ב־ τ, איברי המחזור הם נקודות שבת ב־ δ, ולכן נוכל לבצע את אותה פעולה לעיל על כל מחזורי τ כך שיתקבל זוג התמורות (id,δ'). כיוון שהוא מייצג אותה מטריצה כמו (id,σ) אז $\delta'=\sigma$, וע"י ביצוע הפעולה ההפוכה על (id,σ) (כלומר, "החזרת" המחזורים ש"נלקחו" מ־ τ), נקבל את הזוג (τ,δ). לכן, ביצוע הפעולה המתוארת לעיל על כל תת קבוצה של מחזורים באורך ≤ 2 של σ נותן את כל זוגות התמורות המייצגים אותה מטריצה כמו (id,σ).

נסמן ב־ k_σ את מספר המחזורים באורך≤ 2 ב־ σ, ונקבל כי מספר ההצגות של המטריצה הוא 2^{k_σ} (מספר תתי הקבוצות של מחזורים באורך≤ 2). כעת, לכל $\sigma\in S_n$ "המשקל היחסי" של הזוג (id,σ) במטריצה שהוא מייצג הוא 2^{-k_σ}. נסכום על כל $\sigma\in S_n$, ונקבל כי "המשקל היחסי הכולל" של id בכל המטריצות המיוצגות באמצעותו (ובאמצעות $\sigma\in S_n$ כלשהי) הוא $\sum\limits_{\sigma\in S_n}2^{-k_\sigma}$. מסימטריה, זה נכון לכל $\sigma\in S_n$, ולכן $|M_{n\times n}(2)|=n!\sum\limits_{\sigma\in S_n}2^{-k_\sigma}$.
(מטריצה המיוצגת ע"י 2^{k_σ} זוגות נסכמת 2^{k_σ} פעמים עם משקל 2^{-k_σ} ובסה"כ נספרת פעם אחת).

נסמן: $b_n=\sum\limits_{\sigma\in S_n}2^{-k_\sigma}$.

טענת עזר:

b_n מוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה: $b_n = nb_{n-1} - 0.5(n-1)b_{n-2}$.

הוכחה:

כל $\sigma \in S_n$ (בהצגה מחזורית) מתקבלת ע"י "הכנסת" n למחזור כלשהו ב־ $\sigma' \in S_{n-1}$ או הוספתו ל־ σ' כנקודת שבת. נחלק למקרים:

אם הוספנו את n למחזור באורך 1 (נקודת שבת) נקבל שמספר המחזורים באורך ≤ 2 גדל ב־ 1, כלומר, $k_\sigma = k_{\sigma'}+1$. אחרת, מספר המחזורים באורך ≤ 2 נותר זהה, ואז $k_\sigma = k_{\sigma'}$. לכל $\sigma' \in S_{n-1}$ יש n מקומות אפשריים להוסיף את n, ולכן נקבל $\sum\limits_{\sigma\in S_n} 2^{-k_\sigma} = n\sum\limits_{\sigma'\in S_{n-1}} 2^{-k_{\sigma'}} - c$,
כאשר c הוא ההפרש שמתקבל מתמורות מהסוג הראשון. נשים לב שכל תמורה מהסוג הראשון סכמנו עם ערך $2^{-k_{\sigma'}}$ במקום $2^{-(k_{\sigma'}+1)}$, ובסה"כ סכמנו את התרומה הכוללת של תמורות מסוג זה כפול מהנדרש, ולכן ההפרש c אותו נחסר הוא בדיוק התרומה הכוללת של תמורות אלו. נחשב אותו:

תמורות מהסוג הראשון הן תמורות בהן n נמצא במחזור באורך 2. יש $n-1$ אפשרויות לבחור חבר למחזור ל־ n, ובכל בחירה יש $(n-2)!$ אפשרויות לסדר את שאר האיברים, כאשר כל בחירה מתאימה ל־ $\sigma'' \in S_{n-2}$, ומתקיים: $k_\sigma = k_{\sigma''} + 1$ (כי נוסף מחזור אחד באורך 2), לכן בסה"כ הסכום המבוקש על תמורות מסוג זה הוא:

$(n-1)\sum\limits_{\sigma''\in S_{n-2}} 2^{-(k_{\sigma''}+1)} = 0.5(n-1)\sum\limits_{\sigma''\in S_{n-2}} 2^{-k_{\sigma''}}$. כלומר, $c = 0.5(n-1)\sum\limits_{\sigma''\in S_{n-2}} 2^{-k_{\sigma''}}$,

ולכן: $\sum\limits_{\sigma\in S_n} 2^{-k_\sigma} = n\sum\limits_{\sigma'\in S_{n-1}} 2^{-k_{\sigma'}} - 0.5(n-1)\sum\limits_{\sigma''\in S_{n-2}} 2^{-k_{\sigma''}}$.

אזי, $b_n = nb_{n-1} - 0.5(n-1)b_{n-2}$, כדרוש.

כעת, נסמן: $a_n = |M_{n\times n}(2)| = n!\sum\limits_{\sigma\in S_n} 2^{-k_\sigma}$, אזי: $a_n = n!b_n$.

נכפול את נוסחת הנסיגה של b_n ב־ $n!$ ונקבל: $n!b_n = n!nb_{n-1} - 0.5n!(n-1)b_{n-2}$.

כלומר: $n!b_n = n^2(n-1)!b_{n-1} - 0.5n(n-1)^2(n-2)!b_{n-2}$, נציב את a_n ונקבל:

$a_n = n^2a_{n-1} - 0.5n(n-1)^2a_{n-2}$, כדרוש.

הערה: אנציקלופדיית הסדרות $OEIS$ מציעה מספר נוסחות נוספות לחישוב $|M_{n\times n}(2)|$, אולם עפ"י האנציקלופדיה, אין נוסחה סגורה לחישוב. עפ"י האנציקלופדיה, בשנת 2004 מצא מתמטיקאי צרפתי חובב בשם $Benoit\,Cloitre$ כי $|M_{n\times n}(2)|$ אסימפטוטי ל־ $\dfrac{c\cdot n!^2}{\sqrt{n}}$, כאשר $c = 0.93019..$, ובשנת 2013 הראה $Vaclav\,Kotesovec$ כי $c = \dfrac{e^{0.5}}{\sqrt{\pi}}$. (לא הצלחתי למצוא את המאמרים הרלוונטיים ברשת).