1. יהי $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ הוכח כי

$$\frac{|x_1| + \ldots + |x_n|}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

רמז: בשביל אחד מצדדי האי שוויון יש להשתמש באי שוויון קושי שורץ.

2. תהי $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ מטריקה. הוכח כי הפונקציות הבאות הן גם מטריקות:

(א) $\alpha(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$

(ב) $\beta(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$

3. עבור קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$, נסמן ב $\mathrm{Lim}A$ את אוסף נקודות הגבול של A. הוכח או הפרך את הטענות הבאות.

(א) לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Lim}A \cap \mathrm{Lim}B \subseteq \mathrm{Lim}(A \cap B)$$

(ב) לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Lim}A \cap \mathrm{Lim}B \supseteq \mathrm{Lim}(A \cap B)$$

(ג) לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Lim}A \cup \mathrm{Lim}B = \mathrm{Lim}(A \cup B)$$

(ד) לכל סדרה של קבוצות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\mathrm{Lim} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Lim}A_n$$

4. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה. הוכח כי $\mathrm{Lim}A$ היא קבוצה סגורה.

5. יהי (X, d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$ קבוצה. הוכח כי התנאים הבאים שקולים.

(א) קיימים $x_0 \in X$ ו $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש $A \subseteq B(x_0, r)$.

(ב) לכל $x_0 \in X$ קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש $A \subseteq B(x_0, r)$.

(ג) קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x, y \in X$ מתקיים $d(x, y) < M$.

הערה: קבוצה A המקיימת תכונות אלה נקראת חסומה.

6. קבע עבור כל אחת מהקבוצות הבאות ב $\mathbb{R}^2$ אם היא פתוחה או אם היא סגורה (הוכח או הפרך) ומצא את קבוצת נקודות הגבול.

(א) $A = \{(0,0),(1,0)\}$

(ב) $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(0,1)\}$

(ג) $C = \{(x,y) \mid 0 < x, \quad y < 0\}$

7. האם הקבוצות הבאות פתוחות או סגורות?

(א) $A = \{(x,y) \mid y = 0, \quad x \in (0,1)\}$ **ב** $\mathbb{R}^2$.

(ב) $B = (0,1)$ **ב** $\mathbb{R}$.