

1. יהי $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ הוכח כי

$$\frac{|x_1| + \dots + |x_n|}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

רמז: בשביל אחד מצדדי האי שוויון יש להשתמש באי שוויון קושי שורץ.

2. תהי $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ מטריקה. הוכח כי הפונקציות הבאות הן גם מטריקות:

$$\alpha(x, y) = \min\{d(x, y), 1\} \quad (\text{א})$$

$$\beta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} \quad (\text{ב})$$

3. עבור קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$, נסמן ב $\text{Lim}A$ את אוסף נקודות הגבול של A . הוכח או הפוך את הטענות הבאות.

(א) לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\text{Lim}A \cap \text{Lim}B \subseteq \text{Lim}(A \cap B)$$

(ב) לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\text{Lim}A \cap \text{Lim}B \supseteq \text{Lim}(A \cap B)$$

(ג) לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\text{Lim}A \cup \text{Lim}B = \text{Lim}(A \cup B)$$

(ד) לכל סדרה של קבוצות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\text{Lim} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Lim}A_n$$

4. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה. הוכח כי $\text{Lim}A$ היא קבוצה סגורה.

5. יהי (X, d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$ קבוצה. הוכח כי התנאים הבאים שקולים.

(א) קיימים $x_0 \in X$ ו $r \in \mathbb{R}$ $0 < r$ כך ש $A \subseteq B(x_0, r)$

(ב) לכל $x_0 \in X$ קיים $r \in \mathbb{R}$ $0 < r$ כך ש $A \subseteq B(x_0, r)$

(ג) קיים $M \in \mathbb{R}$ $0 < M$ כך שלכל $x, y \in A$ מתקיים $d(x, y) < M$

הערה: קבוצה A המקיימת תכונות אלה נקראת חסומה.

6. קבע עבור כל אחת מהקבוצות הבאות ב \mathbb{R}^2 אם היא פתוחה או אם היא סגורה (הוכח או הפוך) ומצא את קבוצת נקודות הגבול.

$$A = \{(0, 0), (1, 0)\} \text{ (א)}$$

$$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(0, 1)\} \text{ (ב)}$$

$$C = \{(x, y) \mid 0 < x, \quad y < 0\} \text{ (ג)}$$

7. האם הקבוצות הבאות פתוחות או סגורות?

$$\text{ב } \mathbb{R}^2 \text{ } A = \{(x, y) \mid y = 0, \quad x \in (0, 1)\} \text{ (א)}$$

$$\text{ב } \mathbb{R} \text{ } B = (0, 1) \text{ (ב)}$$