

תרגיל 7

1.

(א) נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

מצאו את הפולנום האופיני של A , ע"ע שלה ומרחבים עצמיים.

(ב) [סעיף רשות, הוא לא יבדק] נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_{13})^{2 \times 2}$$

מצאו את הפולנום האופיני של A , ע"ע שלה ומרחבים עצמיים.

2. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הוכח כי ל A ול A^t יש אותם ע"ע. [הדרכה: הראו כי הפ"א של A ו A^t שווים]

(ב) תהא $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ נגדיר $\bar{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ע"י $\bar{A}_{i,j} = \overline{A_{i,j}}$ כלומר הצמדה של כל איבר ב A (הצמדה מרוכבת). עוד נגדיר $A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ע"י $A^* = (\bar{A})^t = \overline{A^t}$. למשל

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2+5i \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2-5i & -3 \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי אם λ ע"ע של A אזי $\bar{\lambda}$ הוא ע"ע של A^* [הדרכה: הראו כי $\bar{\lambda}$ הוא ע"ע של \bar{A} והשתמש בסעיף הקודם]

(ג) תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הוכיחו כי אם λ ע"ע של A אזי λ^k ע"ע של A^k לכל k טבעי.

(ד) יהא V מ"ו מעל שדה \mathbb{F} . תהא $T : V \rightarrow V$ ה"ל ו $A = [T]_E^E$ מטריצה מייצגת (כאשר E בסיס כלשהוא של V). יהא $v \in V$ ו $\lambda \in \mathbb{F}$ נסמן $v' = [v]_E$ והוכיחו כי

$$Tv = \lambda v \iff Av' = \lambda v'$$

(ה) תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ יהא λ ע"ע של A ו $V_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = \lambda v\}$ המרחב העצמי. הוכיחו כי $V_\lambda \leq \mathbb{F}^n$ הוא תת מרחב (מסקנה: כל צירוף לינארי של ו"ע המשייכים ל λ הוא גם ו"ע של λ , אם הוא שונה מאפס).

(ו) נתונה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה. ונתון

$$f_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$$

הפולינום האופיני שלה. מצאו A^{-1} .

(ז) נתונה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה. ונתון

$$f_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$$

הפולינום האופיני שלה. נתון כי לכל $i \neq j$ מתקיים כי $\lambda_i \neq \lambda_j$ (כלומר כל הע"ע שונים). הוכיחו כי קיים בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ל \mathbb{F}^n המורכב מו"ע (כלומר לכל i מתקיים כי v_i הוא ו"ע של A)

בהצלחה!