<u>הרצאה 2</u>

<u>קבוצה </u>- אוסף של איברים

סימון - $\{\ \}$.

<u>דוגמה</u>

$B = \{A,1,3\}$

<u>סימונים</u>

שייך - $\in$, לא שייך - $\notin$.

<u>דוגמה</u>

$1 \in B, 2 \notin B$.

<u>דוגמאות לקבוצות</u>

<u>מספרים טבעיים</u> - $N = \{1,2,3,\ldots\}$.

<u>מספרים שלמים</u> - $Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$.

<u>מספרים רציונליים</u> - $Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in Z, 0 \neq b \in Z\right\}$.

<u>הפרדוקס של ראסל</u>

נאמר שקבוצה גדולה היא קבוצה הכוללת את עצמה כאיבר וכל קבוצה אחרת היא קבוצה קטנה.

נגדיר את קבוצת כל הקבוצות הקטנות ב X.

האם X היא קבוצה קטנה?

1. אם X קבוצה קטנה אז על פי הגדרת קבוצה קטנה X איננה כוללת את עצמה. מכיוון ש X היא קבוצת כל הקבוצות הקטנות ו X קבוצה קטנה אז X איננה כוללת את עצמה וקיבלנו סתירה.
2. אם X קבוצה גדולה אז היא כוללת את עצמה לפי ההגדרה של קבוצה גדולה, אבל כמו כל איבר ב X היא חייבת להיות קבוצה קטנה על פי ההגדרה של X ולכן קיבלנו סתירה.

<u>המחשת הפרדוקס</u>

ספרן מתבונן בקובץ קטלוגים שבספרייה:

ישנם קטלוגים שכוללים את עצמם וישנם קטלוגים שאינם כוללים את עצמם.

הספרן מחליט להכין שני קטלוגים נוספים:

1. קטלוג שיכיל בתוכו את רשימת כל הקטלוגים שמכלילים את עצמם.
2. קטלוג שיכיל בתוכו את רשימת כל הקטלוגים שאינם מכלילים את עצמם.

כעת נשאלת השאלה האם רשימת הקטלוגים שאינם מכלילים את עצמם צריך להכליל את עצמו?

1. אם הוא נמצא בקטלוג אז מכיוון שהרשימה מכילה רק קטלוגים שאינם מכלילים את עצמם אז הוא לא צריך להיות בקטלוג.
2. אם הוא לא נמצא בקטלוג ומכיוון שהקטלוג כולל קטלוגים שאינם מכילים את עצמם אז הוא צריך להיות בקטלוג.

הספרן מוצא את עצמו במצב שאין לו פתרון.

<u>מסקנה</u>

"קבוצת כל הקבוצות איננה קיימת"

אנחנו במהלך הקורס נתבונן בקבוצה המכילה את כל הקבוצות שאיתה אנו עובדים (למשל: בתרגיל מסוים) ונקרא לה הקבוצה האוניברסלית.

סימונים: קבוצה אוניברסלית - U. קבוצה ריקה $\{\ \}$.

<u>שוויון קבוצות</u>

תהיינה A ו B קבוצות. נסמן $A=B$ כאשר:

א. לכל $x\in A$ מתקיים $x\in B$.

ב. לכל $x\in B$ מתקיים $x\in A$.

ז"א $x\in B \leftrightarrow x\in A$.

<u>דוגמה</u>

הקבוצות $A=\{1,2,3\}, B=\{1,1,2,2,2,3,3\}$ שוות מכיוון שהתנאי מתקיים.

<u>הערה</u>

סדר וריבוי בקבוצה אינם חשובים.

<u>הכלה</u>

תהיינה A ו B קבוצות. נאמר ש A תת קבוצה של B כאשר לכל $x\in A$ מתקיים $x\in B$.

נסמן $A\subseteq B$.

<u>דוגמאות</u>

$\{1,2,3\}\subseteq\{1,2,3,4\}, \{1,2\}\subseteq\{1,2\}$.

<u>הגדרה</u>

קבוצה X היא ריקה אם אין איברים השייכים ל X. סימון: ϕ

<u>הערה</u>

$\phi \subseteq A$ לכל קבוצה A.

<u>הוכחה</u>

ראינו שיעור שעבר שהפסוק $F \rightarrow$ משהו הוא פסוק אמת.

ולכן הפסוק $x \in \phi \rightarrow x \in A$ הוא פסוק אמת ז"א $\phi \subseteq A$.

<u>הגדרות</u>

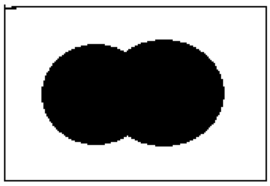
תהיינה A,B קבוצות. $A,B \subseteq U$

<u>איחוד</u>

סימון - $\cup$

$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$.

בדיאגרמת וון (לא ניתן להוכיח באמצעות דיאגרמת וון).

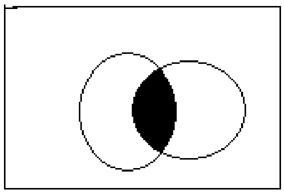


<u>חיתוך</u>

סימון - $\cup$

$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

בדיאגרמת וון



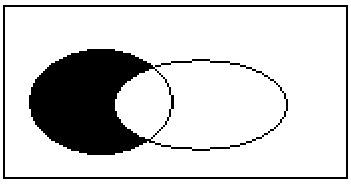
<u>משלים</u>

סימונים: $A^c, A', \overline{A}$.

$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$

<u>הפרש</u>

$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.



<u>לוח השתייכות</u>

בלוח השתייכות נראה את כל האפשרויות שיכולות להיות כאשר האפשרות שאיבר נמצא בקבוצה תסומן ב 1 והאפשרות שאיבר לא נמצא בקבוצה תסומן ב 0.

<u>דוגמה</u>

נרשום לוח השתייכות עבור $A \setminus B$.

A	B	$A \setminus B$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

<u>תרגיל</u>

תהיינה A ו B קבוצות הוכיחו: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

<u>פתרון</u>

נוכיח:

1. הקבוצה באגף שמאל מוכלת בקבוצה שבאגף ימין.
2. הקבוצה שבאגף ימין מוכלת בקבוצה שבאף שמאל.

$$x \in (A \cap B)^c \leftrightarrow x \notin A \cap B \leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B) \leftrightarrow \left(x \in A^c \vee x \in B^c\right) \leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$$

המעבר בכל מעבר הוא "אם ורק אם" ולכן הוכחנו גם את סעיף 1 וגם את סעיף 2.

<u>הערה</u>

לא תמיד ניתן להשתמש במעבר $\leftrightarrow$.

למשל: $x \in A \cap B \rightarrow x \in B$ אבל לא בטוח ש $x \in A$ ולכן לא ניתן לרשום $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in B$.

<u>תרגיל</u>

תהיינה A ו B קבוצות $\left(A,B\subseteq U\right)$. הוכיחו $A\cap B\subseteq B$.

<u>פתרון</u>

$x\in A\cap B\rightarrow\left(x\in A\wedge x\in B\right)\rightarrow x\in B$.

<u>תכונות ההכלה</u>

1. רפלקסיביות: $A\subseteq A$.
2. טרנזיטיביות: $A\subseteq B\wedge B\subseteq D\rightarrow A\subseteq D$.

<u>תרגיל</u>

תהיינה A ו B קבוצות $\left(A,B\subseteq U\right)$.

הוכיחו $A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$.

<u>פתרון</u>

$\Rightarrow$

נתון $B\subseteq A$ צ"ל $A\cap B=B$. הוכחנו בתרגיל קודם ש $A\cap B\subseteq B$ נשאר להוכיח ש $B\subseteq A\cap B$.

יהי $x\in B$ נתון ש $B\subseteq A$ ולכן על פי הגדרת ההכלה נקבל ש $x\in A$ ז"א $x\in A\wedge x\in B$ ולכן $x\in A\cap B$ ז"א $B\subseteq A\cap B$ כדרוש.

$\Leftarrow$

נתון $A\cap B=B$ צ"ל $B\subseteq A$.

יהי $x\in B$ נתון ש $A\cap B=B$ ולכן $x\in A\cap B$ מכיוון ש $A\cap B\subseteq A$ (הוכחנו תרגיל קודם) נקבל ש $x\in A$.

<u>תרגיל</u>

תהיינה A,B,C קבוצות. $\left(A,B,C\subseteq U\right)$.

הוכיחו $A\cap\left(B\cup C\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)$.

פתרון

נוכיח באמצעות טבלת אמת

A	B	C	$A\cap(B\cup C)$	$(A\cap B)\cup(A\cap C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

קיבלנו בשתי העמודות את אותם ערכים ולכן קיבלנו שוויון.

תכונות חשובות

1. חילוף: $A\cap B = B\cap A, A\cup B = B\cup A$.
2. אסוציאטיביות: $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$, $A\cup(B\cup C)=A\cup(B\cup C)$.
3. פילוג: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
4. ניטרליות: $A\cup\phi = A, A\cap U = A$.
5. בליעה: $A\cup U = U, A\cap\phi=\phi$.
6. חוקי דה מורגן: $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c, (A\cap B)^c = A^c\cup B^c$.
7. $A\cap A^c=\phi, A\cup A^c = U, A\cap A = A. A\cup A = A$.

תרגיל

תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו: $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

הוכחה

$$A\setminus(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^c = A\cap(B^c\cup C^c)=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$$

שוויון 1: הגדרת ההפרש. שוויון 2: חוקי דה מורגן. שוויון 3: פילוג/דיסטריביוטיביות. שוויון 4: הגדרת ההפרש.