

תרגיל 5 – רציפות, נגזרות, דיפרנציאביליות וכלל השרשרת

1. קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות ב $(0,0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 \sin(y)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|x|} \sin(y)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + \sin(y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 1 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{ה.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{y^2}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{ו.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^4 + y^4) \ln(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{ז.}$$

2. קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות ב $(0,0,0)$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^6 y^6 z^2}{x^{18} + y^{18} + \ln\left(1 + (3x^2 y - z)^2\right)} & (x, y, z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x, y, z) = (0,0,0) \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 y - y^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x, y, z) = (0,0,0) \end{cases} \quad \text{ב.}$$

3. קבעו האם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות ב $(0,0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy + y^2x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\text{ד. } f(x, y) = (xy)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{רמז: } \sqrt{h^2 + k^2} \geq \sqrt{2|hk|})$$

$$\text{ה. } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^8}{x^2 + y^8} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (\text{רמז: הביטו בנגזרות החלקיות})$$

4. מצאו את $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ עבור הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} xy - \frac{3xy^5}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

5. תהי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ ונתון כי $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,t)}{t} = 1$.

מצאו את הנגזרת המכוונת של f בכיוון $(1,-1)$.

6. מצאו את משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה $z = x \cdot \sin(xy - 1) + \frac{x}{y} + 1$ בנקודה $(1,1)$

7. גובה פני השטח מעל המישור (x, y) נתון ע"י הפונקציה $z = x^2 y + x - 2$.

אם אנו עומדים בנקודה $(1,1,0)$ מהו וקטור הכיוון של העלייה התלולה ביותר?

8. תהי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(1, 2)$ כך שמתקיים $f_x(1, 2) = -1$, $f_y(1, 2) = 0$.

כמו כן נגדיר $g(t) = 2\cos(t)$, $h(t) = \sin(t) + \cos(t)$ ונגדיר $z(t) = f(h(t), g(t))$.

מצאו את $z'(0)$.

9. תהי $f(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור \mathbb{R}^2 .

נניח בנוסף כי קיים n עבורו $x \cdot f_x(x, y) + y \cdot f_y(x, y) = n \cdot f(x, y)$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

הוכיחו כי לכל $t > 0$ מתקיים $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

הדרכה:

א. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$ הפונקציה $F(t) = t^{-n} f(tx, ty)$ קבועה לכל $t > 0$.

ב. הוכיחו כי $F(t) = f(x, y)$.