מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 1

פתרון בעיה 1

נוכיח את השקילות הטענות על ידי השרשרת הלוגית: 2) $\Leftarrow$ 1) $\Leftarrow$ 3) $\Leftarrow$ 4) $\Leftarrow$ 2).

2) $\Leftarrow$ 1) $x \in A \overset{2)}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B$

1) $\Leftarrow$3).

$A \cup B \supseteq B$: $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$ לפי הגדרת האיחוד.

$B \supseteq A \cup B$: $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$. אם $x \in B$ הכל הוכח.

אם $x \in A$, אז לפי 1) - $x \in B$.

3) $\Leftarrow$4) $x \in B^c \Rightarrow x \notin B \overset{3)}{\Rightarrow} x \notin A \Rightarrow x \in A^c$

4) $\Leftarrow$2)

$A \cap B \supseteq A$: יהיה $x \in A$.

אם $x \in B$, אז $x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

אם $x \notin B$ אז $x \in B^c \overset{4)}{\Rightarrow} x \in A^c \Rightarrow x \notin A \Rightarrow$סתירה.

$A \cap B \subseteq A$: לפי הגדרת החיתוך: $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$

פתרון בעיה 2

הוכחה:

$\Leftarrow$. יהיה $E = \{e\}$. אז לכל $f: A \to E$, כאשר $A \neq \emptyset$ ולכל $x \in A$, הפונקציה בהכרח תינתן על ידי שוויון: $f(x) = e$.

$\Rightarrow$. נניח שלכל קבוצה $A \neq \emptyset$ קיימת רק פונקציה אחת $f: A \to E$. הקבוצה E בהחרך לא ריקה כי לאיברים של A קיימות תמונות.

יהיו (בשלילה) קימים איברים $a, b \in E$ ו-$a \neq b$. אם ניקח איבר $x_0 \in A$ ונגדיר 2 פונקציות מ-A ל-E: $f(x) = \begin{cases} a, & if\ x = x_0 \\ b, & \text{אחרת} \end{cases}$ ו- $g(x) = \begin{cases} b, & if\ x = x_0 \\ a, & \text{אחרת} \end{cases}$,

אז $f(x_0) \neq g(x_0) \Rightarrow f \neq g$, שסותר להנחה.

פתרון בעיה 3

א' תהי $f \circ g$ חח"ע. נניח בשלילה ש-g היא לא חח"ע. אזי קיימים $x, y \in A$ כך ש-$x \neq y$ ו- $g(x) = g(y)$. מכאן מקבלים:

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\big(g(y)\big) = f \circ g(y) \Rightarrow f \circ g$ היא לא חח"ע. סתירה.

ב' תהי $f \circ g$ היא על ויהיה $y \in C$. אז קיים x:

$x \in A$, $f \circ g(x) = y$. אבל $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$. לכן f היא על.

פתרון בעיה 4

א' ⇐. (הוכחה בשלילה). תהי $f: A \to B$ מצטמצמת משמאל ולא חח"ע.
אז יהיו $x, y \in A$ כך ש- $x \neq y$ ו- $f(x) = f(y)$.
נסתכל בקבוצה $C = \{c\}$ ונגדיר $g: C \to A$ ו- $h: C \to A$ כך ש- $g(c) = x$, $h(c) = y$.
אז $f \circ g = f \circ h \Leftarrow f \circ h(c) = f(y) = f(x) = f \circ g(c)$, אבל $g \neq h$

⇒. תהיינה $f, g.h$ פונקציות כך ש- $f: A \to B$ – חח"ע, $g, h: C \to A$ ו- $f \circ g = f \circ h$.
אם $c \in C$ אז $f \circ g(c) = f \circ h(c)$, זאת אומרת $f(g(c)) = f(h(c)) \overset{f-\text{חחע}}{\Longleftarrow} g(c) = h(c)$. לכן $g = h$.

ב' ⇐. (הוכחה בשלילה). תהי $f: A \to B$ מצטמצמת מימין ולא על. אז קיים איבר $B \ni b$ כך ש- $b \notin f(A)$.
נגדיר שתי סונקציות $g, h: \to \{0,1\}$ כך ש- $g(f(A)) = 1, g([f(A)]^c) = 0,\ h(B) = 1$.
אז $f \circ g = f \circ h \equiv 1$, אבל $g \neq h \Leftarrow g(b) = 0$, $h(b) = 1$.

⇒. תהיינה $f, g.h$ פונקציות כך ש- $f: A \to B$ –על, $g, h: B \to C$ ו- $g \circ f = h \circ f$.
אם $b \in B$ אז (מכיוון ש-f על) קיים $A \ni a$ כך ש- $f(a) = b$. אז
$g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a) = h \circ f(a) = h(f(a)) = h(b)$. אז $g = h$

פתרון בעיה 5.

נוכיח קודם למה : יהיו X, Y שתי תת-קבוצות של הקבוצה הבסיסנת U . אזי
$X = Y^c, Y = X^c \Leftarrow X \cap Y = \emptyset \wedge X \cup Y = U$.
הוכחה : כל איבר של U שייך ל-X או ל-Y אבל לא לשתיהן ביחד. לכן אם הוא שייך ל-X הוא לא שייך ל-Y ולכן שייך ל-Y^c . אם הוא שייך ל-Y^c הוא לא שייך ל-Y ולכן שייך ל-X. $X = Y^c$ הוכח. $Y = X^c$ מוכיחים בדיוק באותה דרך.■למה

א' מהגדרת המשלים $D \cap D^c = \emptyset \wedge D \cup D^c = B$. לפי נוסחאות ידועות מהכיטה:
$A = f^{-1}(B) = f^{-1}(D \cup D^c) = f^{-1}(D) \cup f^{-1}(D^c)$,
$\emptyset = f^{-1}(\emptyset) = f^{-1}(D \cap D^c) = f^{-1}(D) \cap f^{-1}(D^c)$
לכן מהלמה: $f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$ ■ א'

ב' ⇐יהיה $f(X^c) = (f(X))^c$ לכל $A \supseteq X$ ונניח (בשלילה) ש-:
(1) f היא פונקציה לא חח"ע. אז קיימים $A \ni x, y$ כך ש- $x \neq y$ ו- $z = f(x) = f(y)$.
נגדיר $X = \{x\}$. אז $z \notin (f(X))^c \Leftarrow f(X) \ni z \Leftarrow z = f(x)$.
אבל $f(X^c) \ni z \Leftarrow z = f(y) \wedge y \in X^c$. סתירה להנחה .
(2) f היא פונקציה לא על. תהי $X = A$.אז $\emptyset \neq (f(A))^c = (f(X))^c$.
אבל $\emptyset = f(A^c) \Leftarrow \emptyset = A^c$. סתירה להנחה .

⇒

⊆. יהיה $y \in f(X^c)$ אזי קיים x שלא מ-X כך ש-$f(x) = y$. עכשיו בהכרח $(f(X))^c \ni y$ כי אחרת $y \in f(X)$ זאת אומרת קיים x' מ-X כך ש-$f(x') = y$ וזה בילתי אפשרי כי f חח"ע ו-$x \neq x'$.
⊇. יהיה $y \in (f(X))^c$. אזי לכל $X \ni x$: $f(x) \neq y$ אבל קיים $A \ni x'$ כך ש-$f(x') = y$ מכיוון ש-f על .
מכאן $x' \notin X$ ולכן ב$y \in f(X^c$ ■ ב'