תרגיל 7

1. הוכיחו כי לא כל הקבוצות המדידות לבג ב $\mathbb{R}$ מדידות בורל וכי לא כל פונקציה קציפה מעתיקה קבוצה מדידה לבג לקבוצה מדידה לבג.

הדרכה:

א. הגדירו את הפונקציה $g=\varphi+x$ המוגדרת על הקטע $[0,1]$ כאשר φ הינה פונקצית קנטור אשר הגדרנו בכיתה. הראו כי g רציפה, חד חד ערכית, עולה ממש ועל $[0,2]$.

ב. הראו כי $g\left([0,1]\setminus \mathrm{C}\right)$ הינה קבוצה פתוחה עם מידת לבג 1 .מכאן שלקבוצה $g\left(C\right)$ מידה 1 כאשר C הינה קבוצת קנטור.

ג. השתמשו בעובדה כי אם E הינה קבוצה עם מידה חיובית אזי קיימת קבוצה $M\subseteq E$ כך ש M איננה מדידה לבג(לא למדנו את זה אבל זה נכון) והראו כי קיימת קבוצה לא מדידה ב $[0,2]$ כך ש $K=g^{-1}\left(M\right)$ הינה מדידה לבג.

ד. הראו כי K איננה מדידה בורל וכי $g\left(K\right)=M$.

פתרון:

א. g רציפה כסכום של פונקציות רציפות וכן עולה ממש כי x עולה ממש ו φ עולה. מכאן כי היא חד חד ערכית ומכיוון ש $g\left(0\right)=0, g\left(1\right)=2$ נקבל כי g על $[0,2]$.

ב. עפ"י משפט מאינפי, מכיוון ש g עולה ממש ורציפה אזי g^{-1} גם כן רציפה. מכאן ש g הינה הומאומורפיזם ו $g\left([0,1]\setminus \mathrm{C}\right)$ הינה פתוחה. בנוסף, על כל קטע שהוצאנו מקבוצת קנטור I_n הפונקציה g מבצעת הזזה $g\left(I_n\right)=\varphi\left(I_n\right)+I_n$ ומכאן שהמידה של קטע שהורדנו נשמרת ולכן $m\left(g\left(I_n\right)\right)=m\left(I_n\right)$ ומכאן ש $m\left(g\left([0,1]\setminus \mathrm{C}\right)\right)=1$. מכאן ש $m\left(g\left(C\right)\right)=m\left([0,2]\right)-m\left(g\left([0,1]\setminus \mathrm{C}\right)\right)=1$.

ג. קיימת קבוצה $M\subseteq g\left(C\right)$, מכאן נובע כי $K=g^{-1}\left(M\right)\subseteq C\Rightarrow m\left(K\right)=0$ ולכן K מדידה.

ד. מכיוון g^{-1} רציפה נובע כי היא מדידה בורל. מכאן שלו K הייתה מדידה בורל אזי $g\left(K\right)$ הייתה מדידה בורל בניגוד למה שראינו ולכן סתירה. $g\left(K\right)=M$ נובע מהחד חד ערכיות.

2. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית, הוכיחו: $\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|f(x-h)-f(x)\right|dm=0$.

רמז: העזרו בקירוב של פונקציות רציפות.

פתרון: אנו יודעים כי מכיוון ש f אינטגרבילית אז לכל $\varepsilon>0$ קיימת פונקציה g רציפה אשר מתאפסת מחוץ לקטע חסום כך ש $\int\left|f(x)-g(x)\right|dm<\varepsilon$. נבנה סדרה g_n של פונקציות רציפות כאלו כך ש $\int\left|f(x)-g_n(x)\right|dm<\frac{1}{2^{n+1}}$. מכאן נובע כי

$$\int\left|f(x-h)-f(x)-\left(g_n(x-h)-g_n(x)\right)\right|dm$$
$$\le\int\left|f(x-h)-g_n(x-h)\right|dm+\int\left|f(x)-g_n(x)\right|dm<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}$$

עכשיו, נשים לב כי מכיוון ש $\left|g_n(x-h)-g_n(x)\right|<\left|g_n(x-h)\right|+\left|g_n(x)\right|$, עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת ורציפות הפונקציה g נובע כי

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|g_n(x-h)-g_n(x)\right|dm$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\lim_{h\to 0}\left|g_n(x-h)-g_n(x)\right|dm=\int_{\mathbb{R}}0=0$$

מכאן ש

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|f(x-h)-f(x)\right|dm<\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|g_n(x-h)-g_n(x)\right|dm+\frac{1}{2^n}$$
$$=0+\frac{1}{2^n}$$

נשאיף את n לאינסוף ונקבל את תהתוצאה.

3. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה בעלת השתנות חסומה. הראו כי f הינה מדידה.

פתרון: ידוע כי $f=h-g$ כאשר h ו g פונקציות עולות. ראינו בתרגול כי פונקציה עולה הינה מדידה ומכאן ש f מדידה.