תרגיל בית 7

1. נניח כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שייכת ל L^p עבור $p>1$ מסויים וכן גם ב L^1 . הראו כי קיימים קבועים $c>0$ ו $\alpha\in(0,1)$ כך ש

$$\int_A |f(x)|dx \le cm(A)^{\alpha}$$

פתרון: מזה ש $f\in L^1$ אנחנו יודעים כי $\int_A |f(x)|dx<\infty$. מכיוון ש $f\in L^p$ עבור $p>1$ נסמן את הנורמה שלו ב $\|f\|_p=c$.עפ"י א"ש הולדר נקבל

$$\|f1_A\|_1 \le \|f\|_p \|1_A\|_q$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)1_A(x)|\,dx = \int_A |f(x)|dx \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= cm(A)^{\frac{1}{q}}$$

נותר להראות כי $\frac{1}{q}\in(0,1)$. $q=\frac{p}{p-1}>1\Rightarrow \frac{1}{q}\in(0,1)$.

2. יהי (X,S,μ) ממ"ח כך ש $\mu(X)=1$, ותהי $g:X\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית ו f פונקציה קמורה . הוכיחו את אי שוויון יאנסן

$$f\left(\int g d\mu\right) \le \int f(g) d\mu \, .$$

רמז: השתמשו בתכונה של פונקציות קמורות - $f(y)\ge f(x)+c(y-x)$, הציבו $x=\int f$ וקחו אינטגרל על שני הצדדים.

פתרון: נשתמש בתכונה של פונקציות קמורות: קיים מספר ממשי c כך שמתקיים $f(y)\ge f(x)+c(y-x)$ לכל $y\in\mathbb{R}$. נציב $x=\int f(g)d\mu$ ו $y=g$ נבצע אינטגרציה לשני האגפים ונקבל מלינאריות האינטגרל כי

$$\int f(g)d\mu \ge \int f\left(\int g d\mu\right)+c\left(g-\left(\int g d\mu\right)\right)d\mu =$$

$$f\left(\int g d\mu\right)+c\left(\left(\int g d\mu\right)-\left(\int g d\mu\right)\right) = f\left(\int g d\mu\right)$$

1. הוכיחו כי קבוצת הפונקציות הפשוטות צפופה ב L^p עבור $p \geq 1$.

פתרון: תהי $f \in L^p$ $\left(\int |f|^p d\mu < \infty\right)$ חיובית. אזי קיימת סדרה של פונקציות פשוטות φ_n כך ש$\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ ו $\varphi_n \to f$. עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_n{}^p d\mu = \int \lim_{n\to\infty} \phi_n{}^p d\mu = \int f^p d\mu$$

ראינו בהרצאה את אי השוויון $|a+b|^p \leq 2^p \left(|a|^p + |b|^p\right)$. נגדיר את $g_n = 2^p \left(|\varphi_n|^p + |f|^p\right)$.
ברור כי לכל n g_n אינגרבילית וכן כי $g = \lim g_n = 2^{p+1} |f|^p$ אינטגרבילית. מכאן , עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי
$\lim_{n\to\infty} \int |f - \phi_n|^p d\mu = \int \lim_{n\to\infty} |f - \phi_n|^p d\mu = 0$ ומכאן שההתכנסות היא ב L^p . עבור פונקציה כללית, נשתמש בא"ש מינקובסקי על מנת לקבל
$\left\| f^+ - f^- - \left(\varphi_n^+ - \varphi_n^-\right)\right\|_p \leq \left\| f^+ - \varphi_n^+ \right\|_p + \left\| \varphi_n^- - f^- \right\|_p \to 0$.

2. הראו כי L^∞ הינו מרחב שלם.

פתרון: עפ"י מה שראינו בכיתה מספיק להראות כי כל טור ב L^∞ שמתכנס בהחלט מתכנס. נניח ו $f_n \in L^\infty$, וגם $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$. נגדיר את $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ולכל f_n נגדיר את הקבוצה $E_n = \left\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\right\}$. ברור כי $m(E_n) = 0$ וגם כי $m(E) = m\left(\bigcup_n E_n\right) = 0$.

מן ההגדרה של $\|\cdot\|_\infty$ נובע כי $f(x)$ מתכנס בהחלט כב"מ(על E) ולכן גם מתכנס כב"מ. נראה כי $f \in L^\infty$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in E^c} |f(x)| \leq \sup_{x\in E^c} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in E^c} |f_n(x)| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\|_\infty < \infty
\end{aligned}$$

ומכאן ש $f \in L^\infty$.