

תרגול 6 – 88-112 אלגברה לינארית 1

סמסטר א' תשע"ו

נובמבר 2015

1 מרחבים וקטוריים

הגדרה 1.1. יהי \mathbb{F} שדה. **מרחב וקטורי** מעל \mathbb{F} הוא קבוצה V עם שתי פעולות, חיבור וכפל בסקלר, המקיימות את האקסיומות הבאות:

1. אקסיומות הקשורות לחיבור:

- (א) סגירות: לכל $v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2 \in V$.
- (ב) אסוציאטיביות: לכל $v_1, v_2, v_3 \in V$, $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$.
- (ג) קומוטטיביות: לכל $v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.
- (ד) איבר נטרלי לחיבור: קיים $0_V \in V$ כך שלכל $v \in V$, $0_V + v = v + 0_V = v$.
- (ה) איבר נגדי: לכל $v \in V$ קיים $(-v) \in V$ שעבורו $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$.

2. אקסיומות הקשורות לכפל בסקלר:

- (א) סגירות: לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$, $\alpha v \in V$.
- (ב) פילוג בווקטורים: לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $v, w \in V$, $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$.
- (ג) פילוג בסקלרים: לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$, $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.
- (ד) לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$, $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.
- (ה) איבר היחידה: לכל $v \in V$, $1v = v$.

דוגמה 1.2. יהי \mathbb{F} שדה. הדוגמאות הבאות הן מרחבים וקטוריים מעל \mathbb{F}

1. \mathbb{F} מרחב וקטורי מעל עצמו, כשפעולת הכפל בסקלר היא פעולת הכפל הרגילה בשדה.
2. \mathbb{F}^n מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} .
3. $\mathbb{F}^{m \times n}$ הוא מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} .
4. אוסף הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית, $\{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\}$, הוא מרחב וקטורי עם אותן פעולות כמו של \mathbb{F}^n .

5. אוסף הפולינומים עם דרגה לכל היותר n , $\mathbb{F}_n[x]$.

דוגמה 1.3. \mathbb{C} מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} .
באופן כללי: אם \mathbb{F}' תת-שדה של \mathbb{F} , אזי \mathbb{F} מרחב וקטורי מעל \mathbb{F}' .

טענה 1.4. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} . אזי:

$$1. \text{ לכל } \alpha \in \mathbb{F}, \alpha \cdot 0_V = 0_V$$

$$2. \text{ לכל } v \in V, 0_{\mathbb{F}} \cdot v = 0_V$$

$$3. \text{ לכל } v \in V, -v = (-1) \cdot v$$

$$4. \text{ לכל } v, w \in V, -(v+w) = (-v) + (-w)$$

תרגיל 1.5. נסתכל על \mathbb{R}^2 , ונגדיר עליו פעולה חדשה:

$$\alpha \odot (x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$$

האם $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ הוא מרחב וקטורי?

פתרון. כדי לבדוק האם זה מרחב וקטורי, צריך לבדוק את כל האקסיומות. אנחנו יודעים שהחיבור מתנהג בסדר, ולכן נבדוק את הכפל בסקלר. נבדוק את הפילוג בסקלרים: יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ויהי $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. אזי

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \odot (x, y) &= ((\alpha + \beta)^2 x, (\alpha + \beta)^2 y) = (\alpha^2 x + 2\alpha\beta x + \beta^2 x, \alpha^2 y + 2\alpha\beta y + \beta^2 y) \\ \alpha \odot (x, y) + \beta \odot (x, y) &= (\alpha^2 x, \alpha^2 y) + (\beta^2 x, \beta^2 y) = (\alpha^2 x + \beta^2 x, \alpha^2 y + \beta^2 y) \end{aligned}$$

רואים שהביטויים האלו אינם שווים, ולכן זה לא מרחב וקטורי.
דוגמה מפורשת: ניקח $\alpha = \beta = 1$, $(x, y) = (1, 0)$. אזי

$$\begin{aligned} (1+1) \odot (1, 0) &= 2 \odot (1, 0) = (4, 0) \\ 1 \odot (1, 0) + 1 \odot (1, 0) &= (1, 0) + (1, 0) = (2, 0) \end{aligned}$$

תתי-מרחבים

הגדרה 1.6. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} . תת-קבוצה $U \subseteq V$ שהיא גם מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} עם אותן פעולות כמו של V נקראת **תת-מרחב** של V .

דוגמה 1.7

- לכל מרחב וקטורי יש שני תתי-מרחבים טריוויאליים: $\{0_V\} \subseteq V$ ו- $V \subseteq V$.
- הקבוצה $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ היא תת-מרחב ב- \mathbb{R}^2 . גיאומטרית, זהו ישר העובר בראשית הצירים.
- באופן כללי יותר: כל ישר העובר דרך ראשית הצירים הוא תת-מרחב של \mathbb{R}^2 . אבל הישר $\{(x, y) \mid 5x - 3y + 7 = 0\}$ אינו תת-מרחב של \mathbb{R}^2 .
- ב- \mathbb{R}^3 , כל ישר וכל מישור העוברים דרך ראשית הצירים הם תתי-מרחבים. למשל, $U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ הוא תת-מרחב (המייצג את המישור xy).

הערה 1.8. נניח $U \subseteq V$ תת-מרחב. אזי $0_U = 0_V$. לכן, כל תת-מרחב חייב להכיל את וקטור האפס.

טענה 1.9 (קריטריון מקוצר לתת-מרחב). $U \subseteq V$ הוא תת-מרחב של V אם ורק אם הוא מקיים את התנאים הבאים:

1. $0_V \in U$.

2. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $u, w \in U$, $\alpha u + \beta w \in U$.

תרגיל 1.10. נסתכל ב- $\mathbb{R}_3[x]$ על הקבוצה

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 0, p(1) = p(-1)\}$$

האם U תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}_3[x]$?

פתרון. נוכיח ש- U תת-מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$ לפי הקריטריון המקוצר:

1. ראשית, $0 \in U$ באופן ברור.

2. כעת, נניח $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ו- $p(x), q(x) \in U$. לכן,

$$p(0) = q(0) = 0, p(1) = p(-1), q(1) = q(-1)$$

נבדוק האם $\alpha p(x) + \beta q(x)$ מקיים את הדרישות:

$$(\alpha p(x) + \beta q(x))(0) = (\alpha p(x))(0) + (\beta q(x))(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = 0$$

$$(\alpha p(x) + \beta q(x))(1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = \alpha p(-1) + \beta q(-1) = (\alpha p(x) + \beta q(x))(0)$$

קיבלנו ש- $\alpha p(x) + \beta q(x) \in U$ ולכן $\alpha p(x) + \beta q(x)$ מקיים את הדרישות, ולכן $\alpha p(x) + \beta q(x) \in U$.

לכן U תת-מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$.

תרגיל 1.11. נסתכל ב- $\mathbb{R}_3[x]$ על הקבוצה

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 1, p(1) = p(-1)\}$$

האם U תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}_3[x]$?

פתרון. לא! כי $0 \notin U$, שהרי הצבת $x = 0$ בפולינום האפס נותנת 0.

חיתוך ואיחוד תתי-מרחבים

משפט 1.12. יהיו $U, W \subseteq V$ תתי-מרחבים של V . אזי $U \cap W$ תת-מרחב של V .

תרגיל 1.13. יהיו $U, W \subseteq V$ תתי-מרחבים של V . הוכיחו: $U \cup W$ תת-מרחב של V אם ורק אם $U \subseteq W$ או $W \subseteq U$.

הוכחה. \Rightarrow אם $U \subseteq W$, אזי $U \cup W = W$; אם $W \subseteq U$, אזי $U \cup W = U$. בכל אחד מהמקרים קיבלנו את אחד מתתי-המרחבים המקוריים, ולכן זה תת-מרחב. \Leftarrow נניח בשלילה ש- $U \not\subseteq W$ וגם $W \not\subseteq U$. לכן קיימים

$$\begin{cases} u \in U \\ u \notin W \end{cases} \text{ and } \begin{cases} w \in W \\ w \notin U \end{cases}$$

בכל מקרה, $u, w \in U \cup W$. לפי הנתון, $U \cup W$ תת-מרחב, ולכן $v = u + w \in U \cup W$. לפי הגדרת האיחוד, יש שתי אפשרויות:

1. $v \in U$ - ואז גם $v - u \in U$, כי U תת-מרחב. אבל אז $w = v - u \in U$, בסתירה לבחירת w .

2. $v \in W$ - ואז גם $v - w \in W$, כי W תת-מרחב. אבל אז $u = v - w \in W$, בסתירה לבחירת u .

בשני המקרים קיבלנו סתירה, ולכן $U \subseteq W$ או $W \subseteq U$.

□

תרגיל 1.14. נתונים שני תתי-מרחבים של \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\} \\ W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 2y - 6z = 0\} \end{aligned}$$

1. חשבו במפורש את $U \cap W$.

2. האם $U \cup W$ תת-מרחב של \mathbb{R}^3 ? אם לא, הראו אקסיומה של מרחב וקטורי שאינה נכונה ב- $U \cup W$.

פתרון.

1. נניח $(x, y, z) \in U \cap W$. לכן (x, y, z) מקיים את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 5x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

נפתור את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

לכן, $x = 0$ ו- $-y + 3z = 0$. $z = t$. הוא משתנה חופשי, ונקבל שמתקיים

$$U \cap W = \{(0, 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

2. צריך לבדוק האם $U \subseteq W$ או $W \subseteq U$. זה לא מתקיים:

$$\begin{cases} (1, -1, 1) \in U \\ (1, -1, 1) \notin W \end{cases} \text{ and } \begin{cases} (2, 1, 2) \in W \\ (2, 1, 2) \notin U \end{cases}$$

כדי להראות במפורש איזו אקסיומה אינה מתקיימת, ניעזר בהוכחה שלהלן. ראינו שהסתירה נוצרה עקב שימוש בסגירות לחיבור; לכן, נסתכל על הווקטור

$$(1, -1, 1) + (2, 1, 2) = (3, 0, 3)$$

על ידי בדיקה ישירה, $(3, 0, 3) \notin U$ וגם $(3, 0, 3) \notin W$, ולכן $(3, 0, 3) \notin U \cup W$. זה מוכיח ש- $U \cup W$ אינו סגור לחיבור, כלומר זהו אינו תת-מרחב.

סכום של תתי-מרחבים

ראינו שאיחוד שני תתי-מרחבים אינו תת-מרחב בהכרח. היינו רוצים, בהינתן שני תתי-מרחבים U ו- W של V , למצוא את תת-המרחב הכי קטן שמכיל את שניהם. אנחנו יודעים שאם יש כזה תת-מרחב, נקרא לו $U + W$, אזי לכל $u \in U$ ולכל $w \in W$, $u + w \in U + W$. זה הבסיס להגדרה הבאה:

הגדרה 1.15. יהיו $U, W \subseteq V$ שני תתי-מרחבים. נגדיר את **הסכום** שלהם להיות

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

משפט 1.16 (אפיון הסכום).

1. $U + W$ הוא תת-מרחב של V .

2. אם Y תת-מרחב אחר של V המקיים $U, W \subseteq Y$, אזי $U + W \subseteq Y$.

תרגיל 1.17. עבור תתי-המרחבים $U, W \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$, קבעו מהו $U + W$:

1. $U =$ המטריצות הסימטריות; $W =$ המטריצות האלכסוניות.

2. $U =$ המטריצות הסימטריות; $W =$ המטריצות המשולשיות עליונות.

3. $U =$ המטריצות האנטי-סימטריות; $W =$ מטריצות עם עקבה 0.

(להוסיף הגדרות בהתאם לצורך)

פתרון.

1. $U + W = U$, ולכן $W \subseteq U$.

2. $U + W = \mathbb{R}^{n \times n}$. דוגמה לפירוק עבור 2×2 (אפשר להכליל לכל $n \times n$):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b-c \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

3. $U + W = W$, ולכן $U \subseteq W$.