לינארית 2 מדעי המחשב פתרון מועד א תשעו

1. בשאלה זאת נסמן את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$ ב $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

(א) נבדוק

i. הפונקציה T_3 אינה העתקה לינארית כי

$$T_3\left(e_3 + e_3\right) = T_3(2e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T_3e_3 + T_3e_3$$

ii. הפונקציה T_2 אינה העתקה לינארית כי כל ה"ל שולחת 0 ל - 0 אך

$$T_2(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ולכן אינה ה"ל

iii. T_1 היא ה"ל היחידה ומכאן ולהבא בשאלה זאת נסמן ב T. נוכיח כי T הפיכה: נגדיר

$$B = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$Tv = T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = Bv$$

ראינו בתירגול שהפונקציה המוגדרת ע"י כפל במטריצה $v \mapsto Bv$ היא ה"ל
ולכן T היא ה"ל.

(ב) נסמן $A = [T]_E^E$ ואז מחישוב ישיר

$$A = \left([Te_1]_E, [Te_2]_E, [Te_3]_E, [Te_4]_E\right) = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

כעת, הפולינום האופיני של T הוא

$$P_T(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&&&-1\\&\lambda&-1&\\&-1&\lambda&\\-1&&&\lambda\end{pmatrix}\right|=$$

נחבר את השורות 1+2+3 לשורה הרביעית. פעולה זאת לא משנה את הדטרמיננטה

$$=\left|\begin{pmatrix}\lambda&&&-1\\&\lambda&-1&\\&-1&\lambda&\\\lambda-1&\lambda-1&\lambda-1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)\left|\begin{pmatrix}\lambda&&&-1\\&\lambda&-1&\\&-1&\lambda&\\1&1&1&1\end{pmatrix}\right|=$$

נחסר את מהעמודה הרביעית את העמודה הרשונה וכן נעשה לעמודה השניה והשלישית ונקבל (בנוסף לפיתוח לפי שורה רביעית)

$$=(\lambda-1)\left|\begin{pmatrix}\lambda&&&-\lambda-1\\&\lambda&-1&\\&-1&\lambda&\\1&0&0&0\end{pmatrix}\right|=-(\lambda-1)\left|\begin{pmatrix}&&-\lambda-1\\\lambda&-1&\\-1&\lambda&\end{pmatrix}\right|=$$

נפתח לפי עמודה שלישית ונקבל

$$=(\lambda+1)(\lambda-1)\left|\begin{pmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)(\lambda-1)\left(\lambda^2-1\right)=(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$$

(ג) מסעיף קודם נקבל שני ע"ע ± 1. נחשב ו"ע מתאימים:

i. עבור $\lambda_1=1$

$$A-I=\begin{pmatrix}-1&&&1\\&-1&1&\\&1&-1&\\1&&&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&&&1\\&-1&1&\\&1&-1&\\0&&&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&&&1\\&-1&1&\\&0&0&\\0&&&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda_1=1}=\left\{\begin{pmatrix}s\\t\\t\\s\end{pmatrix}:s,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ii. עבור $\lambda_2=-1$

$$A+I=\begin{pmatrix}1&&&1\\&1&1&\\&1&1&\\1&&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&&&1\\&1&1&\\&1&1&\\0&&&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&&&1\\&1&1&\\&0&0&\\0&&&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda_2=-1}=\left\{\begin{pmatrix}-s\\-t\\t\\s\end{pmatrix}:s,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{v_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},v_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

כיוון שפ"א של Tמתפרק לגורמים לינארית + לכל ע"ע הר"א=ר"ג נסיק כי Tלכסינה.

נגדיר

$$P=(v_1,v_2,v_3,v_4)$$

ונקבל

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}=D$$

או באופן שקול $A=PDP^{-1}$ (מי שרוצה לדייק בתשובתו, נגדיר $P=P_1,D=D_1$)

.2

(א) נראה כי T ה"ל : לכל $f,g\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים כי

$$T(\alpha f+g)=[\alpha f+g]"+2[\alpha f+g]'=\alpha f"+g"+2(\alpha f'+g')=\alpha(f"+2f')+g"+2g'=\alpha T(f)+T(g)$$

וסיימנו. נחשב מטריצה מייצגת ל T לפי הבסיס הסטנדרטי $S=\{1,x,x^2\}$:

$$[T]_S^S=\left([T(1)]_S,[T(x)]_S,\left[T(x^2)\right]_S\right)=\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

המטריצה מדורגת ורואים כי $\dim Im(T)=rank(T)=rank([T]_S^S)=2$.
כעת, משפט הדרגה אומר כי

$$3=\dim V=\dim\ker T+\dim ImT$$

ולכן $\dim\ker T=3-2=1$.

(ב) הפ"א של T הוא

$$P_T(\lambda)=\left|\lambda I-[T]_S^S\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&2&-2\\0&\lambda&4\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right|=\lambda^3$$

ולכן $m_T(\lambda)=\lambda^i$ עבור $i\in\{1,2,3\}$. נבדוק

i. עבור $i=1$ נקבל כי $[T]_S^S \neq 0$ ולכן אפשרות זאת נפסלת

ii. עבור $i=2$ נקבל כי $\left([T]_S^S\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ ולכן אפשרות זאת נפסלת

iii. נשארו עם אפשרות $i=3$ שאכן מתקיים (גם לפי משפט קיילי המילטון) כי $\left([T]_S^S\right)^3 = 0$

כיוון ש $m_T(\lambda)$ אינו מתפרק לגורמים לינארים שונים ממעלה 1 נקבל כי T אינה לכסינה

(ג) הפ"מ $m_T(\lambda)$ חושב בסעיף הקודם והוא שווה ל λ^3

.3

(א) נוכיח כי זוהי מ"פ. לכל $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים

i.

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \\
&= (a_1+b_1)c_1 + 2(a_2+b_2)c_2 + 3(a_3+b_3)c_3 = \\
&= (a_1c_1 + 2a_2c_2 + 3a_3c_3) + (b_1c_1 + 2b_2c_2 + 3b_3c_3) = \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\left\langle \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \\
&= \alpha a_1b_1 + 2\alpha a_2b_2 + 3\alpha a_3b_3 \\
&= \alpha(a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3) \\
&= \alpha \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

(ב) נבצע תהליך גרם שמידט שבסופו נקבל קבוצה או"ג $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ שננרמל נחשב-

$$
\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{6/4}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

כעת ננרמל ($\|w_1\| = \sqrt{6}, \|w_2\| = \sqrt{3/2}, \|w_3\| = \frac{2}{3}$) ונקבל

$$
\left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_{3=}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
$$

בסיס או"נ.

(ג) נחשב

$$
\begin{aligned}
\Pi_W(u) &= \langle u, u_1\rangle u_1 + \langle u, u_2\rangle u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} 15 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}}(-4)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{15}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 19 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4. נכון. צריך לבצע 5 החלפות עמודות (את עמודה 1 עם 10, את עמודה 2 עם 9 וכו'). כל החלפה עמודות גורמת להכפלת הדט' ב מינוס 1 ולכן

$$det(A') = (-1)^5 det(A) = -det(A)$$

5. לא נכון. לפי משפט

$$rank(AA') \leq rank(A)$$

כיוון ש לA יש עמודה 1 אזי דרגתה קטנה שווה ל1 בפרט $rank(AA') \leq 1 < 7$ ולכן לא הפיכה (מטריצות מסדר 7×7 הפיכות אמ"מ דרגתם =7)

6. נכון. אם $T:V\to W$ הפיכה אזי $\dim V=\dim W$ אבל אצלנו מימדי התחום והטווח הינם שווים ($5776\neq 2016$)

7. נכון. לפי משפט הדרגה, עבור $T:V\to V$ ה"ל, מתקיים כי

$$\dim\ker T+\dim ImT=\dim V$$

אזי: T על אמ"מ $\dim ImT=\dim V$ אמ"מ $\dim\ker T=0$

8. נכון. מטריצה אינה הפיכה אמ"מ יש לה ע"ע =0 אמ"מ 0 הוא שורש של הפ"א. כיוון ש $p_A(0)=1\neq 0$ נקבל כי Aהפיכה.

9. לא נכון. למשל

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},A^t=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

לשתיהם יש ע"ע יחיד שהוא 0 אבל:
ל A הוקטור העצמי המתאים הוא $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ואילו
ל A^t הוקטור העצמי המתאים הוא $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

10. אם הפ"א מתפרק לגורמים לינארים (למשל מעל $\mathbb{C}$) אזי כן. כי בנוסף לכך מתקיים כי הר"ג = ר"א לכל ע"ע (בשל העובדה שהר"ג חסום בין 1 לבין הר"א + ר"א=1)
אם הפ"א לא מתפרק לגורמים לינארים אזי לא כי תנאי הכרחי שמטריצה לכסינה הוא שהפ"א מתפרק לגורמים לינארים. למשל

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

11. נכון. כיוון ש $m_A(x)=x^3$ ולפ"מ ולפ"א יש אותם גורמים נקבל כי השורש היחידי של הפ"א הוא 0 כלומר רק 0. כלומר למשוואה $|\lambda I-A|=0$ יש פתרון יחיד והוא 0. אם המטריצה $I-A$ היתה עם דטר' 0 אזי היה עוד פתרון ששווה ל־1. לכן נסיק כי למטריצה $I-A$ יש דטר' שונה מאפס, כלומר הפיכה.

12. לא נכון. למשל

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

אינה לכסינה (הפ"א לא מתפרק לגורמים לינארים) ואילו

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

כן לכסינה (היא אלכסונית!)

13. לא נכון. למשל הפ"א של

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},A'=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

שווה ל x^2 אבל אין להם אותה צורת זורדן (A,A' כבר בצורת זורדן והם אינם שוות)

14. לא נכון. למשל ב $V=\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית מתקיים כי

$$v=(1,0)\,,u=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

בעלי נורמה 1 וגם

$$v+u=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

עם נורמה 1.

15. לא נכון. למשל $V=\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית מתקיים כי $u=e_1$ אורתוגונאלי ל $v=e_2$ וגם $v=e_2$אורתוגונאלי ל $w=e_3$ובנוסף גם u אורתוגונאלי ל w (כאשר $\{e_1,e_2,e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי)