

פתרון תרגיל בית 6 מבוא לתורת החבורות 88-211 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ג' טבת ה'תשע"ז, 1.1.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי $H \subseteq G$ תת-קבוצה של חבורה G . הוכיחו ש- $H \leq G$ אם ורק אם $\langle H \rangle = H$. פתרון. לפי הגדרה, בכל מקרה מתקיים $H \subseteq \langle H \rangle$. אם H תת-חבורה, אז היא תת-החבורה הקטנה ביותר שמכילה את H . כלומר $\langle H \rangle \subseteq H$, ולכן $\langle H \rangle = H$. לפי הגדרה, $\langle H \rangle$ היא תת-חבורה של G . לכן אם $\langle H \rangle = H$, אז H היא תת-חבורה.

שאלה 2. יהיו $f : G \rightarrow H$ ו- $g : H \rightarrow K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g \circ f : G \rightarrow K$ היא הומומורפיזם.

פתרון. נתון שלכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$, ושלכל $h_1, h_2 \in H$ מתקיים $g(h_1 h_2) = f(h_1) f(h_2)$. בפרט זה נכון עבור $h_i = f(g_i)$. לכן לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים

$$(g \circ f)(g_1 g_2) = g(f(g_1 g_2)) = g(f(g_1) f(g_2)) = g(f(g_1)) g(f(g_2)) = (g \circ f)(g_1) (g \circ f)(g_2)$$

ולכן $g \circ f$ הומומורפיזם.

שאלה 3. תהינה G, H שתי חבורות, ונסמן $K = G \times \{e_H\}$. הוכיחו כי $K \triangleleft G \times H$, וגם $K \cong G$ ו- $(G \times H) / K \cong H$.

פתרון. יש להוכיח שהפונקציה $\varphi : G \rightarrow K$ המוגדרת לפי $\varphi(g) = (g, e_H)$ היא איזומורפיזם, ולכן $K \cong G$. לשאר הדרישות, יש להוכיח שההטלה $\pi : G \times H \rightarrow H$ המוגדרת לפי $\pi(g, h) = h$ היא אפימורפיזם, ושהגרעין שלו הוא בדיוק K .

שאלות להגשה

שאלה 4. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה. נגדיר את הענרפל (או הנורמליזטור) של H ביחס ב- G להיות

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}$$

א. הוכיחו כי $N_G(H) \leq G$.

ב. הוכיחו כי $H \triangleleft N_G(H)$.

ג. הסבירו מדוע $N_G(H)$ היא תת־חבורה הגדולה ביותר של G שבה H נורמלית. הסיקו כי $H \triangleleft G$ אם ורק אם $N_G(H) = G$.

פתרון. א. המנרמל $N_G(H)$ לא ריק כי $e \in N_G(H)$, שהרי $eH = He$ לכל תת־חבורה של G . נשתמש בקריטריון המקוצר לתת־חבורה. יהיו $x, y \in N_G(H)$ לכן

$$xy^{-1}H = xHy^{-1} = Hxy^{-1}$$

כי $xH = Hx$ ומפני ש- $yH = Hy$, אז בכפל משמאל ומימין ב- y^{-1} נקבל $Hy^{-1} = y^{-1}H$. לכן $xy^{-1} \in N_G(H)$ ולכן $N_G(H) \leq G$.

ב. אנחנו ידועים שלכל $h \in H$ מתקיים $hH = H = Hh$. לכן $H \subseteq N_G(H)$ ולכן $H \leq N_G(H)$. לפי הגדרה לכל $x \in N_G(H)$ מתקיים $xH = Hx$ לכן $H \triangleleft N_G(H)$.

ג. תהי תת־חבורה נורמלית $K \triangleleft G$ המכילה את H . לפי הגדרה לכל $x \in K$ מתקיים $xH = Hx$ ולכן $x \in N_G(H)$. כלומר $K \subseteq N_G(H)$. אם $G = N_G(H)$, אז H נורמלית ב- G לפי הסעיף הקודם. בכיוון השני, אם H נורמלית ב- G אז לכל $x \in G$ מתקיים $xH = Hx$, כלומר $G = N_G(H)$.

שאלה 5. נתבונן בחבורה $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב- G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. הראו כי תת־חבורה $H = \langle \frac{2}{3} + \mathbb{Z}, \frac{3}{11} + \mathbb{Z} \rangle$ (שנוצרת על ידי המחלקות של $\frac{2}{3}$ ו- $\frac{3}{11}$) היא ציקלית. מצאו את האינדקס $[G : H]$.

פתרון. א. איבר היחידה בחבורה G הוא המחלקה $0 + \mathbb{Z}$. לכן יש למצוא לכל $x \in G$ מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כך שנקבל $n \cdot x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. שימו לב כי החבורה חיבורית ולכן למציאת הסדר "העלאה בחזקה" היא כפל ב- n . כל איבר בחבורה אפשר לרשום בצורה $x = \frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ עבור $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$. מכאן קל לראות כי $b \cdot (\frac{a}{b} + \mathbb{Z}) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ לכן x הוא לכל היותר מסדר (סופי) b . נניח כי $\frac{a}{b}$ הוא שבר מצומצם, ולכן הסדר של x במקרה זה הוא בדיוק b . ברור שסדרת השברים $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ מתאימה לסדרה של איברים ב- G שסדרם עולה ממש. מינוח: החבורה G היא דוגמה לחבורה מפותלת מאקספוננט אינסופי.

ב. יש להוכיח שקיים $q \in \mathbb{Q}$ כך שמתקיים $\langle \frac{2}{3} + \mathbb{Z}, \frac{3}{11} + \mathbb{Z} \rangle = \langle q + \mathbb{Z} \rangle$. נראה שאפשר לבחור את $q = \frac{1}{33}$. בשביל להראות הכלה דו־כיוונית, מספיק להראות הכלה של היוצרים. נשים לב כי $\frac{1}{33} = -2 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \frac{3}{11}$ ולכן $\langle \frac{1}{33} + \mathbb{Z} \rangle \subseteq \langle \frac{2}{3} + \mathbb{Z}, \frac{3}{11} + \mathbb{Z} \rangle$. מצד שני $\frac{2}{3} = 22 \cdot \frac{1}{33}$, $\frac{3}{11} = 9 \cdot \frac{1}{33}$ ולכן $\langle \frac{2}{3} + \mathbb{Z}, \frac{3}{11} + \mathbb{Z} \rangle = \langle \frac{1}{33} + \mathbb{Z} \rangle$. סדר תת־חבורה H הוא 33 ואילו G היא אינסופית, ולכן האינדקס שלה היא אינסופי לפי משפט לגראנז'. בנוגע לאינדקס, אפשר להראות גם שלכל שני מספרים ראשוניים $p_1 \neq p_2$ שונים שאינם מחלקים את 33 יתקיים כי $p_1 + H \neq p_2 + H$ ולכן ישנן אינסוף מחלקות שמאליות שונות.

שאלה 6. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^2$.

ב. $f : S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = (\sigma(1), \sigma(2))$.

ג. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k) = [k]$ (כלומר שולחת כל מספר k למחלקת השקילות שלו מודולו n).

ד. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k) = ([k], [k])$.

ה. $f_x : G \rightarrow G$ המוגדרת לפי $f_x(g) = x^{-2}gx^2$, כאשר G חבורה ו- $x \in G$ איבר.

פתרון. א. הפונקציה היא מונומורפיזם, כי למשל $f(1) = f(-1) = 1$. אבל היא לא אפימורפיזם, כי למשל $3i \notin \text{im } f$.

ב. הפונקציה הזו היא לא הומומורפיזם. למשל כי היחידה לא נשלחת ליחידה, או ש- $f(\text{id} \cdot \text{id}) \neq f(\text{id})f(\text{id})$.

ג. הפונקציה היא אפימורפיזם, כמו שראינו בכיתה. ההוכחה מסתמכת על כך שחיבור מודולו n מוגדר היטב. היא לא מונומורפיזם, כי הסדר של המקור גדול ממש מסדר התמונה, או למשל כי $f(0) = f(n) = [0]$.

ד. הפונקציה היא הומומורפיזם, בדומה לסעיף הקודם. הפעם היא לא אפימורפיזם, עבור $n \geq 2$, מפני שסדר התמונה הוא n , ולא n^2 . למשל $(0, 1) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ לא בתמונה. עבור $n = 1$ ברור מה קורה.

ה. הפונקציה הזו היא איזומורפיזם. סוג כזה של איזומורפיזם נקרא אוטומורפיזם פנימי. נראה שאכן מדובר בהומומורפיזם:

$$f_x(gh) = x^{-2}ghx^2 = x^{-2}gx^2x^{-2}hx^2 = f_x(g)f_x(h)$$

כדי לראות ש- f_x הוא חח"ע נשים לב שאם $x^{-2}gx^2 = e$, אז $g = x^2ex^{-2}$ ולכן $g = e$. כדי להראות ש- f_x הוא על, יהי $h \in G$. נבחר בתור המקור שלו את x^2hx^{-2} , ואכן $f_x(x^2hx^{-2}) = h$.

שאלה 7. יהי $f : G \rightarrow H$ הומומורפיזם. הוכיחו שאם G נוצרת סופית, אז גם $\text{im } f$ היא חבורה נוצרת סופית. (ודאו שקל לכם להראות שההפך לא נכון.)

פתרון. ההוכחה דומה לתרגיל שבו הראנו שהתמונה של חבורה ציקלית היא גם ציקלית. נניח לפי הנתון כי $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, ונראה $\text{im } f = \langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle$. בכיתה הוכחנו את המקרה $n = 1$.

יהי $h \in \text{im } f$. לכן קיים $g \in G$ כך ש- $f(g) = h$. לפי ההנחה $g = a_{i_1}^{j_1} \dots a_{i_k}^{j_k}$, עבור $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ ו- $j_1, \dots, j_k \in \mathbb{Z}$. נשתמש בכך ש- f הומומורפיזם, ונקבל

$$f(g) = f(a_{i_1}^{j_1} \dots a_{i_k}^{j_k}) = f(a_{i_1})^{j_1} \dots f(a_{i_k})^{j_k} \in \langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle$$

כלומר $\text{im } f \subseteq \langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle$. ההכלה השנייה קלה להוכחה כששמים לב לכך ש- $f(a_1), \dots, f(a_n) \in \text{im } f$.

שאלה 8. הפריכו או הביאו דוגמה לטענות הבאות:

א. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ (רמז: העזרו בשאלה הקודמת).

ב. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z}_{50} \rightarrow \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_5$.

ג. קיים מונומורפיזם $f : \mathbb{Z}_{63} \rightarrow \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_7$.

ד. קיים מונומורפיזם $f : D_4 \rightarrow \mathbb{Z}_8 \times U_8 \times U_8$.

ה. קיים איזומורפיזם $f : S_4 \rightarrow D_{12}$.

ו. קיים מונומורפיזם $f : S_4 \rightarrow S_5 \times D_{12}$.

הוכחה. א. לא קיים אפימורפיזם, כי $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ נוצרת סופית, ולכן לפי השאלה הקודמת התמונה חייבת להיות גם נוצרת סופית. אבל ראינו ש- \mathbb{Q} אינה נוצרת סופית.

ב. לא קיים אפימורפיזם. מדובר בחבורות שוות עוצמה, ולכן אפימורפיזם יהיה גם איזומורפיזם. אבל בחבורה \mathbb{Z}_{50} קיים איבר מסדר 50 (כמו $1 \in \mathbb{Z}_{50}$), ואילו בחבורה $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_5$ הסדר של כל האיברים הוא לכל היותר 10. לכן החבורות לא איזומורפיות. בדרך אחרת, אפשר להעזר בטענה ש- $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ אם ורק אם $(n, m) = 1$.

ג. קיים מונומורפיזם. שוב, מדובר בחבורות שוות עוצמה כי $63 = 9 \cdot 7$, ולכן מונומורפיזם יהיה גם איזומורפיזם. ראינו בכיתה איך יוצרים איזומורפיזם כזה. כאן אפשרות אחת היא $f(x) = (x \bmod 9, x \bmod 7)$.

ד. לא קיים מונומורפיזם. ראינו בכיתה שאי אפשר לשכן חבורה לא אבלית בחבורה אבלית.

ה. לא קיים איזומורפיזם. נכון ששתי החבורות הן לא אבליות מסדר 24, אבל הן עדין לא איזומורפיות. בחבורה D_{12} יש איבר מסדר 12, ואילו ב- S_4 הסדר של האיברים הוא לכל היותר 4.

ו. קיים מונומורפיזם. אנו יכולים לראות את S_n כתת-חבורה של S_{n+1} לפי השיכון הסטנדרטי, השולח תמורה σ של n איברים לתמורה $\hat{\sigma}$ של $n+1$ איברים לפי $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ לכל $1 \leq i \leq n$ ומקבע את האיבר האחרון $\hat{\sigma}(n+1) = n+1$. כלומר יש מונומורפיזם $f_1 : S_4 \rightarrow S_5$. כמוכן שיש מונומורפיזם $f_2 : S_5 \rightarrow S_5 \times D_{12}$ המוגדר לפי $f_2(\sigma) = (\sigma, \text{id})$. ההרכבה $f_2 \circ f_1$ היא דוגמה למונומורפיזם המבוקש.

□

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. תהי G חבורה ויהיו $x, y \in G$ איברים. נתון כי $|G| = 14$, $x \neq e$ ו- $\langle x \rangle$ הוכיחו כי $\langle x, y \rangle = G$. נסו גם להוכיח $G \cong D_7$.

פתרון. נסמן $H = \langle x, y \rangle$. לפי משפט לגראנז' מתקיים כי $|H| \mid 14$. נפסול את כל הסדרים שקטנים מ-14. ברור כי $|H| \neq 1$ מפני ש- $x \in H$ וגם $x \neq e$. בנוסף $y \in H$ והוא אינו חזקה של x , בפרט $e = x^0 \neq y$. כלומר $|H| \neq 2$. נניח בשלילה כי $|H| = 7$. אז נקבל כי $o(x) = 7$, לכן H ציקלית, ולכן y חזקה של x , שזו סתירה לנתון. כלומר $|H| = 14$ ואפשרות היחידה היא $H = G$.

שאלה 10. הוכיחו שחבורה G היא איחוד של שלוש תת-חבורות אמיתיות שלה אם ורק אם $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ היא תמונה אפימורפית של G . רמז: העזרו בשאלת רשות מתרגיל קודם.
תזכורת: חבורה H נקראת תמונה אפימורפית של G אם קיים אפימורפיזם $f : G \rightarrow H$.

בהצלחה!