

תרגיל בית 7

1. נניח כי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שייכת ל L^p עבור $p > 1$ מסויים וכן גם ב L^1 . הראו כי קיימים קבועים $c > 0$ ו $\alpha \in (0,1)$ כך ש

$$\int_A |f(x)| dx \leq cm(A)^\alpha$$

2. יהי (X, S, μ) מ"ח כך ש $\mu(X) = 1$, ותהי $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית ו f פונקציה קמורה. הוכיחו את אי שוויון יאנסן

$$f\left(\int g d\mu\right) \leq \int f(g) d\mu$$

רמז: השתמשו בתכונה של פונקציות קמורות - $f(y) \geq f(x) + c(y-x)$ והציבו $x = \int g$ ו $y = g$

3. הוכיחו כי קבוצת הפונקציות הפשוטות צפופה ב L^p עבור $p \geq 1$.

4. הראו כי L^∞ הינו מרחב שלם.