

תרגול 5

14 באפריל 2016

מרחבים וקטורים

דוגמה שכדאי שתהיה ברקע $\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) \mid x, y, z, \in \mathbb{R}\}$ עם חיבור $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ וכפל בסקלר $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ הוא מרחב וקטורי. ההגדרה הפורמאלית מכילה את הדוגמה. הגדרה: מרחב וקטורי הוא מבנה הכולל קבוצה V עם פעולת חיבור ושדה \mathbb{F} עם חיבור וכפל שלו. בנוסף, קיים כפל המקשר בין איברי V לאיברי \mathbb{F} (כפל בסקלר). האקסיומות שמרחב וקטורי צריך לקיים:

1. אקסיומות של החיבור ב V . לכל $v, w, u \in V$ מתקיים

(א) מוגדרות $v + w \in V$

(ב) קיבוץ $v + (u + w) = (v + u) + w$

(ג) חילוף $v + u = u + v$

(ד) איבר נטרלי $\exists 0 \in V : \forall v \in V : 0 + v = v$

(ה) איבר נגדי $\forall v \in V \exists (-v) \in V : v + (-v) = 0$

2. אקסיומות של כפל וחיבור של שדה - בהגדרת שדה

3. אקסיומות כפל בסקלר לכל $v, u \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ מתקיים

(א) מוגדרות $\alpha v \in V$

(ב) קיבוץ $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

(ג) כפל יחידה $1_{\mathbb{F}}v = v$

(ד) פילוג

i. $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$

ii. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

אומרים ש V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} . איברי V הנקראים וקטורים. איברי \mathbb{F} נקראים סקלרים.

תכונות בסיסיות:

1. $(-1_{\mathbb{F}})v = (-v)$

2. $0_{\mathbb{F}}v = 0_V$

דוגמאות

1. מרחב הפולינומים מעל שדה מדרגה קטנה שווה ל n
 $\mathbb{F}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{F}\}$ עם פעולת חיבור פולינומים וכפל בסקלאר טבעיים.

מקרה פרטי $V = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$
 עם חיבור $(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$

וכפל בסקלאר $\alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2, \alpha \in \mathbb{R}$
 נוכיח כי זהו אכן מרחב וקטורי:

אקסיומות של החיבור ב V . לכל $f, g, h \in V$ פולינומים מדרגה לכל היותר 2 מתקיים:

(א) מוגדרות $f + h \in V$. טריויאלי על פי הגדרה

(ב) קיבוץ $f + (g + h) = (f + g) + h$ - נובע מתכונת הקיבוץ ב \mathbb{R} על המקדמים של הפולינומים.

(ג) חילוף $f + g = g + f$ - נובע מתכונת החילוף ב \mathbb{R} על המקדמים של הפולינומים.

(ד) איבר נטרלי - פולינום האפס 0 ואכן לכל $f \in V$ מתקיים $0 + f = f$

(ה) איבר נגדי - לכל $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V$ קיים $(-f) = (-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2$ ואכן $f + (-f) = 0$

אקסיומות כפל בסקלאר לכל $f, g \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים

(א) מוגדרות $\alpha f \in V$ טריויאלי לפי הגדרה

(ב) קיבוץ $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$ מתקיים לפי תכונת הקיבוץ על מקדמי הפולינום.

(ג) כפל יחידה $1_{\mathbb{R}}f = f$ כי כל מקדם כפול 1 שווה למקדם עצמו

(ד) פילוג

i. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ מתקיים לפי תכונת פילוג של מספריים ממשיים מתקיים בפרט עבור מקדמי הפולינום.

ii. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$ מתקיים לפי תכונת פילוג של מספריים ממשיים מתקיים בפרט עבור מקדמי הפולינום.

2. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N}\}$ עם חיבור וכפל בסקלאר מוכרים.

3. $\mathbb{F}^n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{F}\}$
 עם חיבור $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$
 וכפל בסקלאר $\alpha(a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$

4. מרחב המטריצות $\mathbb{F}^{m \times n}$ מעל שדה \mathbb{F} עם חיבור וכפל בסקלאר שהגדרנו כבר.

5. $V = \mathbb{R}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

6. $V = \mathbb{C}^3, \mathbb{F} = \mathbb{R}$

(הערה/חיידוד $V = \mathbb{R}^3, \mathbb{F} = \mathbb{C}$ אינו מרחב וקטורי כי $(i, i, i) \notin V$)

תתי מרחבים

הגדרה יהיה V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} . $W \subseteq V$ יקרא תת מרחב אם הוא מרחב וקטורי בפני עצמו ביחס לפעולות V .

הערה: כדי לבדוק אם $W \subseteq V$ הוא תת מרחב מספיק לבדוק

1. $w, u \in W$ מתקיים

(א) מוגדרות $u + w \in W$

(ב) איבר נטרלי 0 של V נמצא ב- W

2. אקסיומות כפל בסקלאר לכל $w \in W, \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים

(א) מוגדרות $\alpha w \in W$

את שאר האקסיומות W יורש מ V כתת קבוצה.
הערה: ניתן לרכז את הבדיקות הנ"ל מספיק לבדוק

1. $W \neq \emptyset$

2. שלכל $w, u \in W, \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha u + w \in W$.

הערה: $V \subseteq V, \{0\}$ תמיד תתי מרחבים ונקראים תתי המרחבים הטריטוריאליים.
דוגמאות ודוגמאות נגדיות:

1. המישור האוקלידי $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

(א) $W = \{(x, y) \mid x, y \geq 0\}$ הרביע החיובי אינו תת מרחב

כי $-1(1, 1) = (-1, -1) \notin W$

(ב) $W = \{(x, y) \mid x, y \geq 0 \text{ or } x, y \leq 0\}$ הרביע החיובי והשלילי אינו תת מרחב

כי $(2, 4) \in W + (-3, -3) \in W = (-1, 1) \notin W$

(ג) $W = \{(x, y) \mid y = 3x\}$ קו ישר העובר בראשית הוא כן תת מרחב. נוכיח

i. יהיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W$ אזי $y_1 = 3x_1, y_2 = 3x_2$ ולכן $y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2)$

כלומר $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W$

ii. האיבר הנטרלי של V הוא $(0, 0)$ והוא שייך ל W

iii. יהיו $(x, y) \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ אזי $y = 3x$ ולכן גם $\alpha y = 3\alpha x$ ולכן $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \in W$

(ד) תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ויהא $W = \{(a, b) \mid \exists(x, y) : A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\} = \{A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\}$

$W \neq \emptyset$ נוכיח: ברור ש $(0, 0) \in W$

יהיו $A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ אזי

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} x_1 + \alpha x_2 \\ y_1 + \alpha y_2 \end{pmatrix}$$

$$.A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W \text{ ולכן}$$

הערה: W כמרחב וקטורי בפני עצמו נקרא מרחב העמודות של A .

2. מרחב המטריצות המרוכבות מגודל 2×2 . $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ מעל שדה \mathbb{C}

(א) המטריצות מסוג $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$ הן תת מרחב. נוכיח:

(ברור ש $W \neq \emptyset$). כעת יהיו $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \alpha b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W \text{ אזי}$$

(ב) המטריצות הסימטריות $W = \{A \in V \mid A^t = A\}$ הן תת מרחב (בתרגיל).

(ג) המטריצות הסימטריות איחוד עם המטריצות האנטי סימטריות

$W = \{A \in V \mid A^t = A \text{ or } A^t = -A\}$ אינו תת מרחב כי

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in W$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W \text{ אבל}$$

3. $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים מדרגה 2 מעל \mathbb{R} .

(א) $W = \mathbb{R}_1[x] = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ הינו תת מרחב כי באופן כללי $\mathbb{R}_n[x]$ הוא מרחב וקטורי.

(ב) $W = \{a + bx \mid 0 \neq b \in \mathbb{R}\}$ הפולינומים מדרגה 1 בדיוק אינו תת מרחב.

כי פולינום האפס שהוא האיבר הנטרלי ב V לא נמצא ב W . $0 \notin W$.

4. $V = \mathbb{R}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

(א) $W = \mathbb{Q}$ הוא תת מרחב כי לכל $\alpha \in \mathbb{F}$, $v, w \in W$ מתקיים $\alpha v + w \in W$.

5. $V = \mathbb{R}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

(א) $W = \mathbb{Q}$ הוא אינו תת מרחב כי $\sqrt{2} \in \mathbb{F}$, $1 \in W$, אבל $1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \notin W$.