

## טיוטה של הרצאה 1

מילות מפתח: התכנסות, רציפות, קבוצות פתוחות, טופולוגיה ... Topology = Topos + Logos

Topology  $\supset$  {Algebraic Topology, Topological Algebra, Differential Topology, ...}

מרחב מטרי -- אחת מהדרכים לקבלת מרחבים טופולוגיים.

{Metric Spaces}  $\rightarrow$  {Topological Spaces} (לא על, לא חח"ע)

מרחבים מטריים קישור מומלץ

הגדרה (Frechet 1906): מטריקה (או מרחק) על קבוצה  $X \neq \emptyset$  היא פונקציה

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty) \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

אקסיומות:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (m_1)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (m_2)$$

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad (m_3 \text{ אי שוויון המשולש}).$$

**אינדוקציה!** (שקול:  $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$ )

אומרים ש-  $(X, d)$  מ"מ (metric space).

דוגמאות:

$$(1) \quad (\mathbb{R}, d) \quad \text{שמוגדרת לפי} \quad d(x, y) = |x - y|$$

$$(2) \quad X = \mathbb{R}^n \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \quad \text{א. מטריקה אוקלידית} \quad (\mathbb{R}^n, d)$$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$b. \quad \text{מטריקת הסכום} \quad \text{Manhattan metric} \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

ג. מטריקת המקסימום  $d_{\max}(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$

הערה:  $d_{\max} \leq d \leq d_1 \leq nd_{\max}$

**הגדרה:** (מרחב נורמי) נניח  $E$  מרחב ווקטורי על שדה  $\mathbb{R}$ .

פונקציה  $\|\cdot\|: E \rightarrow [0, \infty)$  נקראת נורמה אם מתקיים:

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_E \quad (n_1)$$

$$c \in \mathbb{R}, v \in E \quad \text{לכל} \quad \|cv\| = |c| \cdot \|v\| \quad (n_2)$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (n_3)$$

אז  $(E, \|\cdot\|)$  נקרא מרחב נורמי [normed space](#)

**משפט:** לכל מ"נ  $(E, \|\cdot\|)$  הפונקציה  $d_{\|\cdot\|}(u, v) := \|u - v\|$   $d_{\|\cdot\|}: E \times E \rightarrow [0, \infty)$

היא מטריקה (שנקראת מטריקה של הנורמה) ותמיד מתקיים  $\|v\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, v)$ .

**הוכחה:**

$$d(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0_E \Leftrightarrow x = y \quad (n_1)$$

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| \quad (n_2)$$

$$\|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \quad (n_3)$$

$$\|v\| = \|-v\| = \|0_E - v\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, v)$$

הערה: "ההתאמה"  $(E, \|\cdot\|) \mapsto (E, d_{\|\cdot\|})$   $\{normed spaces\} \rightarrow \{metric spaces\}$

א. לא על

**הסבר:** למשל מרחב מטרי עם 2 נקודות או מרחב מטרי מעגל עם מטריקה אוקלידית "לא מתקבלת" בתמונה של ההתאמה הנ"ל.

ב. חד חד ערכית

**הסבר:** נובע מהשוויון  $\|v\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, v)$ . מטריקת הנורמה משחזרת את הנורמה.

דוגמאות של מרחב נורמי:

• במרחב ווקטורי  $\mathbb{R}^n$  בעל ממד  $n$  נגדיר:

א. נורמה אוקלידית  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  (משרה מטריקה אוקלידית)

ב. נורמה של הסכום  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  (משרה מטריקת הסכום)

ג. נורמה של מקסימום  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$  (משרה מטריקת מקסימום)

הערה:  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$

\* בקבוצה  $C[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuous functions}\}$  נגדיר:

א.  $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$  מסמנים גם  $\|f\|_\infty$ .

משרה מטריקת מקסימום  $d_{\max}(f_1, f_2) = \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|$  (מדוע מתקבל Max?)

"הסטייה" המקסימלית בין הפונקציות  $f_1, f_2$  בקטע נתון.

ב.  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$  משרה "מטריקת השטחים"  $d_1(f_1, f_2) = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$

"השטח" בין הגרפים של הפונקציות  $f_1, f_2$  בקטע  $[a, b]$

**הגדרה:**  $(X, d)$  נקרא **מרחב פסאודו-מטרי** (*pseudometric*), נקרא *semimetric* לפעמים) אם:

$d(x, y) = 0 \iff x = y$  ( $m_1$  החלשה של  $m_1$ )

$d(x, y) = d(y, x)$  ( $m_2$ )

$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  ( $m_3$ )

**הגדרה:**  $(X, d)$  נקרא **מרחב אולטרה-מטרי** ultrametric אם:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (m_1)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (m_2)$$

$$\max\{d(x, y), d(y, z)\} \geq d(x, z) \quad (m_3 \text{ חזוק של } m_3)$$

$$\{\text{pseudometric}\} \supset \{\text{metric}\} \supset \{\text{ultrametric}\}$$

**הערה:** לכל מטריקה  $d$  גם  $c \cdot d$  מטריקה  $\forall c > 0$  (נכון גם עבור פ"מ, אולטרה-מטריקה)

- לכל קבוצה  $X$  נגדיר  $\forall x, y \in X: d_0(x, y) = 0$  **פסאודו מטריקת האפס**.

- ב-  $X = \mathbb{R}^2$ , נגדיר  $\rho_1(x, y) := |x_1 - y_1|$

פסאודו-מטריקה (אבל לא מטריקה). **למשל**  $\rho_1((3,5), (3,18)) = 0$ .

- ב-  $X = \mathbb{R}^n$ , נגדיר  $\rho_k(x, y) := |x_k - y_k|$  (הרכיב ה- $k$ )

- ב-  $X = C[0, 5]$   $\|f\|_{1 \leq x \leq 2} = \max\{|f(x)| : x \in [1, 2]\}$  **semi-norm (מדוע לא נורמה?)**

- נגדיר על קבוצה  $X$  "אולטרה-מטריקת 1-0":

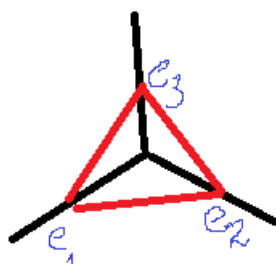
$$d_\Delta(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

**טענה:** על כל קבוצה  $X$  עם  $|X| \geq 2$  יש (לפחות)  $2^{\aleph_0} = \aleph$  מטריקות שונות.

$$\text{card}\{rd_\Delta : r > 0\} = \text{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$$

**תרגיל:**  $X = \left\{ \frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{2}} \right\} \subset \mathbb{R}^n$

עם מטריקה שמושרית מ  $d$  נותן דוגמה ספציפית של  $d_\Delta$ .



## הסבר:

$$d\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right) = \left\| \frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\|e_i - e_j\|}_{\sqrt{2}} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{\dots + 1^2 + \dots + 1^2 + \dots} = \sqrt{2} \quad i \neq j \text{ נשים לב כי כאשר } i \neq j$$

- **דוגמה חשובה:** על שלמים  $\mathbb{Z}$  נגדיר מטריקה ק-אדית לכל מספר ראשוני  $p \in \mathbb{P}$  נתון.

$$d_p(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{p^{k(x,y)}}, & k(x, y) := \max\{i : p^i | (x - y)\}, \quad x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

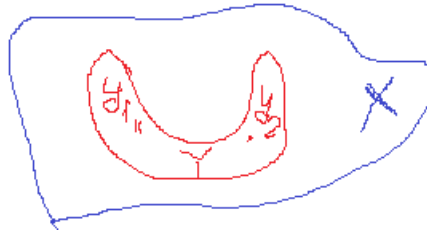
$$d_3(24, 6) = ? \quad .x = 24, y = 6, p = 3 \quad \text{למשל:}$$

$$d_3(24, 6) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$24 - 6 = 18 = 3^2 \cdot 2$$

$$d_3(0, 5) = d_3(0, 1) = 1$$

**הגדרה (תת מרחב מטרי):** יהי  $(X, d)$  מ"מ,  $\emptyset \neq Y \subseteq X$ .



**מטריקת הצמצום של Y מוגדרת:**

$$d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

$$\forall y_1, y_2 \in Y$$

מתקבל מ"מ  $(Y, d_Y)$  שנקרא **תת מרחב מטרי של  $(X, d)$** .

$$Y = \underbrace{\left\{ \frac{e_i}{\sqrt{2}}, 1 \leq i \leq n \right\}}_{\text{ת"מ מטרי}} \subset \underbrace{(\mathbb{R}^n, d)}_{=X} \quad \text{למשל:}$$

מטריקת הצמצום על Y כאן שווה ל-  $d_\Delta$ .

**הערה:** כל מ"מ הוא תת מרחב מטרי (עד כדי איזומטריה) של מרחב נורמי (נוכיח בהמשך).

**הגדרה:** נתון מ"מ  $(X, d)$ ,  $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ ,

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

$$0 \leq d(A, B) < \infty$$

**אזהרה:** זאת לא מטריקה וגם לא פסאודו-מטריקה בקבוצה  $P(X)$  של תת קבוצות.

**הערה:** לא תמיד  $\inf$  ניתן להחליף ב-  $\min$ .

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

$$\min \neq \inf = d(A, B) = 0$$

**תרגיל חשוב:** תמיד מתקיים  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$

**הגדרה (הקוטר):**  $diam(A) := \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$

$$0 \leq diam(A) \leq \infty$$

$diam(A) < \infty$  אם  $A$  נקראת **חסומה**

**הערה:** לא תמיד  $\sup = \max$   $A = (0, 1)$   $\sup = \max \neq \dots = diam = 1$

**דוגמה:**  $diam(\mathbb{Z}, d_p) = 1$

$$\frac{1}{p^k} \leq 1 \quad \forall k \in \{0, 1, \dots\} \quad d_p(0, 1) = 1$$

**הגדרות:** יהי  $(X, d)$ ,  $a \in X$ ,  $r > 0$ .

(1) **כדור פתוח** עם מרכז ב-  $a$  ורדיוס  $r$   $a \in B(a, r) = B_r(a) := \{x \in X | d(a, x) < r\}$

(2) **כדור סגור**  $a \in B[a, r] = B_r[a] := \{x \in X | d(a, x) \leq r\}$

(3) **ספירה**  $a \notin S(a, r) = S_r(a) := \{x \in X | d(a, x) = r\}$  *sphere*

**הערה:**  $a \in B(a, r) \subseteq B[a, r]$   $\underbrace{S(a, r)}_{a \notin} \not\subseteq \underbrace{B[a, r]}_{a \in}$

**דוגמה:** לתאר  $B(a,r), B[a,r], S[a,r]$  במרחב  $(X, d_\Delta)$ .

$$\text{למשל: } S[a,r] = \begin{cases} \emptyset & 0 < r \neq 1 \\ X \setminus \{a\} & r = 1 \end{cases} \quad \dots \quad \text{(המשיכו !)}$$

**דוגמה:** ב  $(\mathbb{Z}, d_3)$   $B[0, \frac{1}{3}] = 3\mathbb{Z}$

**הסבר:**  $B[0, \frac{1}{3}] = \{x \in \mathbb{Z} : d_3(x, 0) \leq \frac{1}{3}\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x\} = 3\mathbb{Z}$

**תכונות: (לבדוק !)**

$$0 < r_1 \leq r_2 \Rightarrow B_{r_1}(a) \subseteq B_{r_2}(a) \quad (\text{א})$$

$$\text{diam}(B_r(a)) \leq 2r \quad (\text{ב}) \quad \text{(לא תמיד שווה. דוגמה ?)}$$

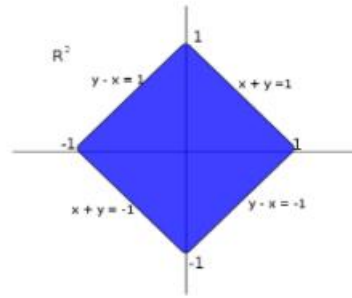
$$\exists z \in X, \exists r > 0 : A \subseteq B_r(z) \Leftrightarrow \text{חסומה } A \subseteq X \quad (\text{ג})$$

$$B_{d_Y}(y, \epsilon) = B(y, \epsilon) \cap Y \quad (\text{ד}) \quad \text{(כדור בתת מרחב)}$$

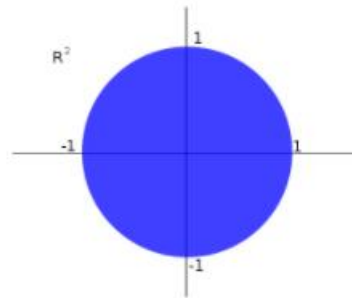
$$d \leq \rho \Rightarrow B_\rho(a, r) \subseteq B_d(a, r) \quad (\text{ה})$$

**דוגמה:** לתאר  $B(a,r)$  במרחבים  $(\mathbb{R}^2, d_{max}), (\mathbb{R}^2, d_1), (\mathbb{R}^2, d)$

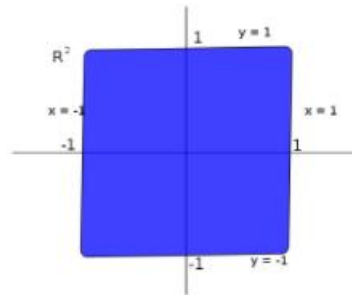
- The metric induced by  $\|\cdot\|_1$  in that case, the unit ball is:  $|x| + |y| < 1$



- The metric induced by  $\|\cdot\|_2$  in that case, the unit ball is:  $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$



- The metric induced by  $\|\cdot\|_\infty$  in that case, the unit ball is:  $\max\{|x|, |y|\} < 1$



**הגדרה:**  $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  (בין מרחבים – מטריים). אומרים ש-  $f$

שיכון איזומטרי אם שומרת מרחקים, כלומר  $\forall x_1, x_2 \in X: \rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$

$$\begin{cases} f(X) = Y \\ f \text{ שומרת מרחקים} \end{cases} \quad \text{איזומטריה אם}$$

**טענה:** כל שיכון איזומטרי תמיד חח"ע.

**הוכחה:** אם  $x_1 \neq x_2$  נניח ש  $f(x_1) = f(x_2)$

אז לכן  $0 = \rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) \underset{m_1}{>} 0$





שימו לב: אם  $f: X \rightarrow Y$  שיכון איזומטרי אם ורק אם  $f: X \rightarrow f(X)$  איזומטריה.

**הערה:** איזומטריה ב-  $Metr$  בתפקיד של איזומורפיזמים. ז"א יש אותן תכונות מטריה.

•  $[8,10] \neq [1,2] \approx [5,6]$

**הסבר:** הזזה ל 4 יחידות בממשיים היא איזומטריה

$$T_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4 + x$$

משרה איזומטריה  $[1,2] \rightarrow [5,6]$

• שיכון איזומטרי לינאר  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  לכל  $m \leq n$  (להשלים)

• כל הזזה  $T_a: E \rightarrow E$   $T_a(v) = a + v$  במרחב נורמי  $a \in E$  היא איזומטריה.

**הסבר:**  $\|(a + v_1) - (a + v_2)\| = \|v_1 - v_2\|$

• כל הזזה  $T_a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$   $T_a(x) = a + x$  במרחב  $(\mathbb{Z}, d_p)$  היא איזומטריה.

(להשלים)

•  $(\mathbb{Z}, d_3)$  לא איזומטרי עם  $(\mathbb{Z}, d_5)$ .

**הסבר:** ב  $(\mathbb{Z}, d_5)$  קיימות נקודות  $x, y$  כך ש  $d_5(x, y) = \frac{1}{5}$  אבל לר ב  $(\mathbb{Z}, d_3)$ .

• קיים שיכון איזומטרי  $\mathbb{R}^n \rightarrow l_2$ .

(להשלים) דומה למקרה של  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  לכל  $m \leq n$ .

• קיים שיכון איזומטרי  $(\mathbb{N}, d_\Delta) \rightarrow l_2$ .

**הסבר מהיר:**  $(\mathbb{N}, d_\Delta) \rightarrow \{\frac{e_n}{\sqrt{2}} : n \in \mathbb{N}\}, n \mapsto \frac{e_n}{\sqrt{2}}$  איזומטריה.

הערה: מרחב הילברט סדרתי  $l_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$

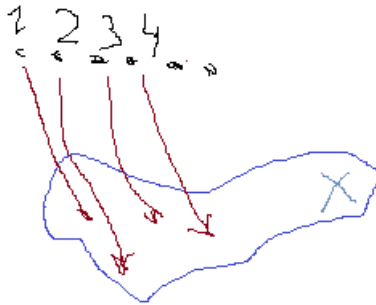
$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$$

מכפלה סקלרית (פנימית)

## התכנסות סדרות

**הגדרה (תזכורת):** סדרה  $x_n$  בקבוצה  $X$  היא פונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow X, n \mapsto f(n) = x_n$ .

**תת סדרה**  $x_{n_k}$  היא צמצום הפונקציה על תת קבוצה אינסופית  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$



**הגדרה:** אומרים שסדרה  $x_n$  מתכנסת ל  $a \in X$  במרחב  $(X, d)$

ונסמן  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  (או  $x_n \xrightarrow{d} a$ ) אם מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0 \quad \text{הגדרה 1:}$$

הגדרה 2: כל  $\varepsilon$ -סביבה  $B(a, \varepsilon)$  של  $a$  מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה  $x_n$

$$\text{הגדרה 3: } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(a, x_n) < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = 0 \quad (\mathbb{Z}, d_3) \text{ דוגמה: ב}$$

$$\text{הסבר: כי } d_3(3^n, 0) = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0$$

### הערה:

- סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת (ברור מה הגבול!). בכל מרחב  $(X, d)$ .
- תת סדרה של סדרה מתכנסת גם מתכנסת (ברור מה הגבול!).
- נניח  $\rho \leq d$ . אז  $x_n \xrightarrow{\rho} a \iff x_n \xrightarrow{d} a$ .
- **הסבר:**  $0 \leq \rho(a, x_n) \leq d(a, x_n) \rightarrow 0$  בעזרת תכונת סנדוויץ  $\rho(a, x_n) \rightarrow 0$ .
- התכנסות ב  $\mathbb{R}^n$  היא התכנסות רכיב-רכיב.
- **הסבר:** התכנסות גוררת "התכנסות רכיב-רכיב" כי  $0 \leq \|v^{(m)} - u\|_k \leq \|v^{(m)} - u\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  (נורמה לפי קואורדינטה ה  $k$ )

גם ההפך נכון. תשתמשו בזה ש  $\sum_{k=1}^n \|v\|_k$  = "נורמה של הסכום".

תרגיל: תנו דוגמה של סדרה לא מתכנסת ב  $l_2$  שמתכנסת רכיב-רכיב.

**הסבר:** הסדרה הבאה מתכנסת רכיב רכיב ל ווקטור האפס

$$e_1 = (1, 0, 0, 0 \dots)$$

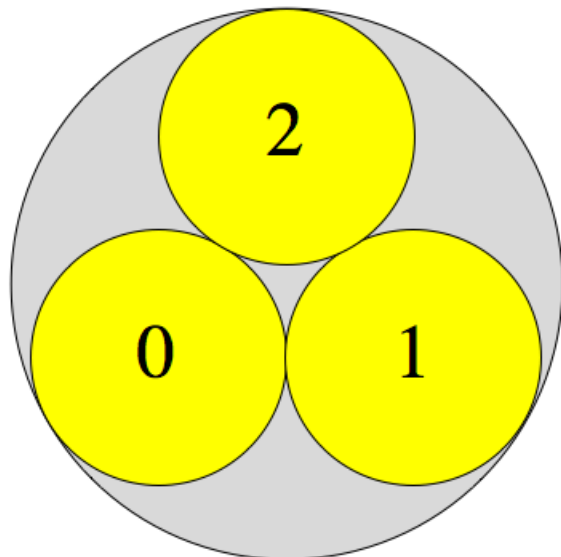
$$e_2 = (0, 1, 0, 0 \dots)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0 \dots)$$

...

**(המשיכו ...)**  $d(e_i, e_j) = 1 \quad \forall i \neq j$  כי לא מתכנס  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

**\*תרגיל:** לפי האיור הבא תרכיבו ניסוח לתרגיל אפשרי לגבי מ"מ  $(\mathbb{Z}, d_3)$



**הגדרה:** נק'  $a \in X$  נקראת **מבודדת** (isolated) אם  $\exists \epsilon > 0: B(a, \epsilon) = \{a\}$

**דוגמאות:** א. אין נקודה מבודדת ב  $\mathbb{R}$  או ב  $\mathbb{Q}$  ...

ב. נקודה 3 מבודדת בתת מרחב  $X = [0, 1] \cup \{3\}$  של  $\mathbb{R}$ .

**הגדרה:** מ"מ  $(X, d)$  נקרא **דיסקרטי** אם כל נקודה ב  $X$  מבודדת.

•  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , כל מרחב  $X$  עם מטריקת 0-1 הם דיסקרטיים.

• (Hamming distance)

בקבוצה  $F(\mathbb{N}) = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \{0,1\} \exists k \in \mathbb{N} x_i = 0 \forall i > k\}$

$$d_H(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|$$

$(F(\mathbb{N}), d_H)$  מרחב מטרי כך שהטופולוגיה שלו היא דיסקרטית.

המשמעות של  $d_H(x, y)$  היא מספר ההבדלים בין המילים  $x, y$ .

מ"מ  $(F(\mathbb{N}), d_H)$  משוכן לתוך מרחב נורמי  $l_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$

**משפט:**  $a$  נקודה מבודדת במרחב מטרי  $(X, d)$  אם ורק אם

$\lim x_n = a$  גורר שהסדרה  $x_n$  היא בהכרח קבועה לבסוף  $x_1, \dots, x_m, a, a, \dots$ .

**הוכחה:** אם  $a$  מבודדת אז קיים  $\varepsilon > 0$  כך ש  $B(a, \varepsilon) = \{a\}$ .

(כיוון ראשון) נניח ש  $\lim x_n = a$ .

עבור  $\varepsilon$  הנ"ל קיים  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  כך ש  $x_n \in B(a, \varepsilon) = \{a\}$  אז הסדרה היא לבסוף  $a$ .

(כיוון שני) נניח כעת שנקודה  $a$  לא מבודדת.

**נוכח יותר:** שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל  $a$ .

נבחר  $x_1 \neq a$  (אם לא קיים אז המרחב הוא נקודון  $\{a\} = X$  והנקודה מבודדת).

נבחר  $0 < \varepsilon_1 < \min\{d(a, x_1), 1\}$

נעיר ש  $0 < d(a, x_1)$  כי  $(X, d)$  מרחב מטרי ומתקיימת  $m_1$ .

בגלל ש  $a$  לא מבודדת קיים  $x_2 \in B(a, \varepsilon_1), x_2 \neq a$

נעיר ש  $x_2 \neq x_1$  כי  $d(a, x_2) < d(a, x_1)$  וגם  $d(a, x_2) < 1$ .

נמשיך בצורה רקורסיבית את הבנייה.

אם כבר הגדרנו  $x_1, \dots, x_n$  (שונים)  $d(a, x_n) < d(a, x_{n-1}) < \dots < d(a, x_1)$

ולא שווים ל  $a$  עם התנאי  $\forall 1 < k \leq n \ d(a, x_k) < \frac{1}{k-1}$

אז נבחר  $\varepsilon_n$  שמקיים  $0 < \varepsilon_n < \min\{d(a, x_n), \frac{1}{n}\}$

ונבחר  $x_{n+1}$  כך ש  $d(a, x_{n+1}) < \varepsilon_n, x_{n+1} \neq a$  (שוב שימו לב ש  $a$  לא מבודדת)

אז  $d(a, x_{n+1}) < d(a, x_n) < d(a, x_{n-1}) < \dots < d(a, x_1)$

כך נקבל סדרה עם איברים שונים ו  $\lim x_n = a$  כי לכל  $n > 1$   $d(a, x_n) < \frac{1}{n-1}$



**תרגיל:** הוכיחו שלא קיימת נקודה מבודדת ב  $(\mathbb{Z}, d_p)$ .

**הסבר:**  $a + p^n \xrightarrow{d_p} a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$  סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל  $a$ .