מרצה: מיכאל מגרל **megereli@math.biu.ac.il** אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 1

מילות מפתח: התכנסות, רציפות, קבוצות פתוחות, טופולוגיה ... Topology =Topos+Logos

Topology $\supset$ {Algebraic Topology, Topological Algebra, Differential Topology, …}

מרחב מטרי -- אחת מהדרכים לקבלת מרחבים טופולוגיים.

{Metric Spaces} → {Topological Spaces} (לא על, לא חח"ע)

מרחבים מטריים קישור מומלץ

הגדרה (Frechet 1906): **מטריקה** (או **מרחק**) על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה

$$d : X \times X \to [0,\infty) \qquad (x,y) \mapsto d(x,y)$$

אקסיומות:

m_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

m_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

m_3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (אי שוויון המשולש).

(שקול: $d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n)$) **אינדוקציה !**

אומרים ש - (X,d) **מ"מ** (metric space).

דוגמאות:

1) $(\mathbb{R},d)$ שמוגדרת לפי $d(x,y) = |x-y|$

2) $X = \mathbb{R}^n$ $x = (x_1,..,x_n)$, $y = (y_1,..,y_n)$

א. מטריקה אוקלידית $(\mathbb{R}^n,d)$ $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

ב. מטריקת הסכום *Manhattan metric* $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

ג. מטריקת המקסימום $d_{\max}(x,y)=\max\{|x_i-y_i| : \mathrm{i}\in\{1,\cdots,n\}\}$

הערה: $d_{\max}\le d\le d_1\le nd_{\max}$

<u>הגדרה:</u> (**מרחב נורמי**) נניח E מרחב ווקטורי על שדה $\mathbb{R}$.

פונקציה $\|\cdot\|:E\to[0,\infty)$ נקראת **נורמה** אם מתקיים:

$(n_1$ $\|\mathrm{v}\|=0\Leftrightarrow \mathrm{v}=0_E$

$(n_2$ $\|\mathrm{cv}\|=|\mathrm{c}|\cdot\|\mathrm{v}\|$ לכל $c\in\mathbb{R}, v\in E$

$(n_3$ $\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|\le\|\mathrm{u}\|+\|\mathrm{v}\|$

אז $(E,\|\cdot\|)$ נקרא **מרחב נורמי** normed space

משפט: לכל מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ הפונקציה $d_{\|\cdot\|}(u,v):=\|u-v\|$ $\quad d_{\|\cdot\|}:\mathrm{E}\times\mathrm{E}\to[0,\infty)$

היא מטריקה (שנקראת מטריקה של הנורמה) ותמיד מתקיים $\|\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$.

הוכחה:

$(n_1$ $d(x,y)=\|x-y\|=0\Leftrightarrow x-y=0_E\Leftrightarrow x=y$

$(n_2$ $\|x-y\|=\|(-1)(y-x)\|=|(-1)|\cdot\|y-x\|=\|y-x\|$

$(n_3$ $\|x-z\|=\|(x-y)+(y-z)\|\le\|x-y\|+\|y-z\|$

$\|\mathrm{v}\|=\|-v\|=\|0_E-\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$.

הערה: "ההתאמה" $(E,\|\cdot\|)\mapsto(\mathrm{E},d_{\|\cdot\|})$ $\quad \{normed\ spaces\}\to\{metric\ spaces\}$

א. **לא על**

הסבר: למשל מרחב מטרי עם 2 נקודות או מרחב מטרי מעגל עם מטריקה אוקלידית "לא מתקבלת "בתמונה" של ההתאמה הנ"ל.

ב. חד חד ערכית

הסבר: נובע מהשוויון $\|\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$. מטריקת הנורמה משחזרת את הנורמה.

דוגמאות של מרחב נורמי:

- במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$ בעל ממד n נגדיר:

א. נורמה אוקלידית $\|\mathrm{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (משרה מטריקה אוקלידית)

ב. נורמה של הסכום $\|\mathrm{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ (משרה מטריקת הסכום)

ג. נורמה של מקסימום $\|\mathrm{x}\|_\infty=\|\mathrm{x}\|_{\max}=\max\{|x_i|: i\in\{1,\cdots,n\}\}$
(משרה מטריקת מקסימום)

הערה: $\|\mathrm{x}\|_{\max}\leq\|\mathrm{x}\|\leq\|\mathrm{x}\|_1\leq n\|\mathrm{x}\|_{\max}$

* בקבוצה $\mathrm{C}[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\ \ continuous\ \ functions\}$ נגדיר:

א. $\|\mathrm{f}\|_{\max}=\max\{|\mathrm{f(x)}|: \mathrm{x}\in[\mathrm{a,b}]\}$. מסמנים גם $\|\mathrm{f}\|_\infty$.

משרה מטריקת מקסימום $d_{max}(f_1,f_2)=\max\limits_{a\leq x\leq b}|f_1(x)-f_2(x)|$ (מדוע מתקבל *Max* ?)

"הסטייה" המקסימלית בין הפונקציות f_1, f_2 בקטע נתון.

ב. $\|\mathrm{f}\|_1=\int_a^b|f(x)|\,dx$ משרה "מטריקת השטחים" $d_1(f_1,f_2)=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|\,dx$

"השטח" בין הגרפים של הפונקציות f_1, f_2 בקטע $[a,b]$

הגדרה: (X,d) נקרא **מרחב פסאודו-מטרי** ($pseudometric$, נקרא $semimetric$ לפעמים) אם:

m_1^p) $x=y \Leftarrow d(x,y)=0$ (החלשה של m_1).

m_2) $d(x,y)=d(y,x)$.

m_3) $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$

הגדרה: (X,d) נקרא **מרחב אולטרה-מטרי** ultrametric אם:

m_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

m_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

m_3^u) $\max\{d(x,y), d(y,z)\} \geq d(x,z)$ (חיזוק של m_3).

$$\{pseudometric\} \supset \{metric\} \supset \{ultrametric\}$$

הערה: לכל מטריקה d גם $c \cdot d$ מטריקה $\forall c > 0$ (נכון גם עבור פ"מ, אולטרה-מטריקה)

- לכל קבוצה X נגדיר $\forall x, y \in X: d_0(x,y) = 0$
  פסאודו מטריקת האפס.
- ב - $X = \mathbb{R}^2$, נגדיר $\rho_1(x,y) := |x_1 - y_1|$

פסאודו-מטריקה (אבל לא מטריקה). למשל $\rho_1((3,5),(3,18)) = 0$.

ב - $X = \mathbb{R}^n$, נגדיר $\rho_k(x,y) := |x_k - y_k|$ (הרכיב ה k)

- ב $X = C[0,5]$ $\| f \|_{1 \le x \le 2} = \max\{| f(x) |: x \in [1,2]\}$ semi-norm (מדוע לא נורמה ?)
- נגדיר על קבוצה X " אולטרה-מטריקת 0-1":

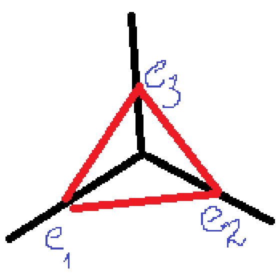
$$d_\Delta(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

טענה: על כל קבוצה X עם $|X| \geq 2$ יש (לפחות) $\aleph = 2^{\aleph_0}$ מטריקות שונות.

$$card\{rd_\Delta : \quad r > 0\} = card(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$$

תרגיל: $X = \left\{\frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{2}}\right\} \subset \mathbb{R}^n$

עם מטריקה שמושרית מ d נותן דוגמה ספציפית של d_Δ.



הסבר:

$$d\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}},\frac{e_j}{\sqrt{2}}\right)=\left\|\frac{e_i}{\sqrt{2}}-\frac{e_j}{\sqrt{2}}\right\|=\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\left\|e_i-e_j\right\|}_{\sqrt{2}}=\begin{cases}1 & i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases}$$

נשים לב כי כאשר $i\neq j$ $\quad \left\|e_i-e_j\right\|=\sqrt{\ldots+1^2+\cdots+1^2+\cdots}=\sqrt{2}$

- <u>**דוגמה חשובה**</u>: על שלמים $\mathbb{Z}$ נגדיר **מטריקה p-אדית** לכל מספר ראשוני $p\in\mathbb{P}$ נתון.

$$d_p(x,y):=\begin{cases}\dfrac{1}{p^{k(x,y)}}\,, k(x,y):=\max\{i:\ p^i|(x-y)\}, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

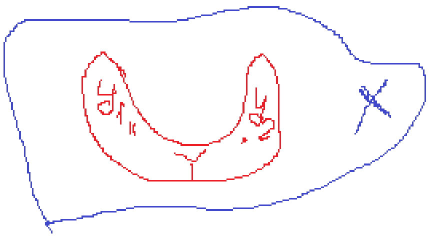
<u>**למשל:**</u> $x=24,\ y=6\ ,p=3$. $\qquad d_3(24,6)=?$

$$d_3(24,6)=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

$$24-6=18=3^2\cdot 2$$

$$d_3(0,5)=d_3(0,1)=1$$

<u>**הגדרה**</u> **(תת מרחב מטרי):** יהי (X,d) מ"מ, $\emptyset\neq Y\subseteq X$.



מטריקת הצמצום של Y מוגדרת:

$$d_Y\,(y_1,y_2\,)=d(y_1,y_2\,)$$

$$\forall y_1,y_2\in Y$$

מתקבל מ"מ (Y,d_Y) שנקרא **תת מרחב מטרי** של (X,d).

<u>**למשל:**</u> $\underbrace{Y=\left\{\frac{e_i}{\sqrt{2}},1\leq i\leq n\right\}}_{\text{ת"מ מטרי}}\subset\underbrace{(\mathbb{R}^n,d)}_{=X}$

מטריקת הצמצום על Y כאן שווה ל - d_Δ.

<u>**הערה**</u>: כל מ"מ הוא תת מרחב מטרי (עד כדי איזומטריה) של מרחב נורמי (נוכיח בהמשך).

הגדרה: נתון מ"מ (X,d), $\emptyset \neq A,B \subseteq X$.

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

$$0 \leq d(A,B) < \infty$$

אזהרה: זאת לא מטריקה וגם לא פסאודו-מטריקה בקבוצה $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ של תת קבוצות.

הערה: לא תמיד inf ניתן להחליף ב - min.

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

$$min \neq inf = d(A,B) = 0$$

תרגיל חשוב: תמיד מתקיים $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

הגדרה (הקוטר): $diam(A) \coloneqq \sup\{d(x,y) | x,y \in A\}$

$$0 \leq diam(A) \leq \infty$$

A נקראת **חסומה** אם $diam(A) < \infty$.

הערה: לא תמיד $sup = max$ $\quad A = (0,1) \quad max \ldots \neq sup \ldots = diam = 1$

דוגמה: $diam(\mathbb{Z}, d_p) = 1$.

$$d_p(0,1) = 1 \quad \forall k \in \{0,1,\cdots\} \quad \frac{1}{p^k} \leq 1$$

הגדרות: יהי (X,d), $a \in X$, $r > 0$.

1) **כדור פתוח** עם מרכז ב $-a$ ורדיוס r = $a \in B(a,r) = B_r(a) \coloneqq \{x \in X | d(a,x) < r\}$

2) **כדור סגור** $a \in B[a,r] = B_r[a] \coloneqq \{x \in X | d(a,x) \leq r\}$

3) **ספרה** $sphere$ $a \notin S(a,r) = S_r(a) \coloneqq \{x \in X | d(a,x) = r\}$

הערה: $a \in B(a,r) \subseteq B[a,r]$ $\quad \underbrace{S(a,r)}_{a \notin} \subsetneq \underbrace{B[a,r]}_{a \in}$

דוגמה: לתאר $B(a,r), B[a,r], S[a,r]$ במרחב $(X, d_{\triangle})$.

למשל: $S[a,r] = \begin{cases} \emptyset & 0 < r \neq 1 \\ X \setminus \{a\} & r = 1 \end{cases}$ .... (המשיכו !)

דוגמה: ב $(\mathbb{Z}, d_3)$ $B[0,\frac{1}{3}] = 3\mathbb{Z}$

הסבר: $B[0,\frac{1}{3}] = \{x \in \mathbb{Z} : \quad d_3(x,0) \le \frac{1}{3}\} = \{x \in \mathbb{Z} : \quad 3 \mid x\} = 3\mathbb{Z}$

תכונות: (לבדוק !)

א) $0 < r_1 \le r_2 \Rightarrow B_{r_1}(a) \subseteq B_{r_2}(a)$.

ב) $diam(B_r(a)) \le 2r$ (לא תמיד שווה. דוגמה ?).

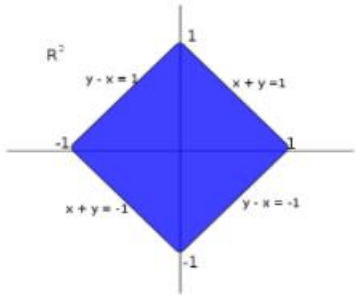
ג) $A \subseteq X$ חסומה $\Leftrightarrow \exists z \in X, \exists r > 0 : A \subseteq B_r(z)$.

ד) (כדור בתת מרחב) $B_{d_Y}(y, \epsilon) = B(y, \epsilon) \cap Y$

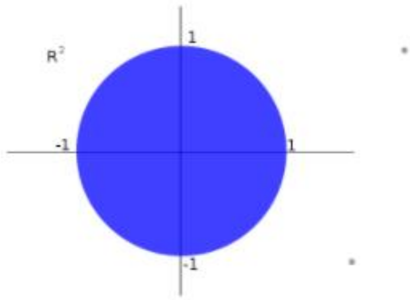
ה) $d \le \rho \Rightarrow B_\rho(a,r) \subseteq B_d(a,r)$

דוגמה: לתאר $B(a,r)$ במרחבים $(\mathbb{R}^2, d_{max}), (\mathbb{R}^2, d_1), (\mathbb{R}^2, d)$

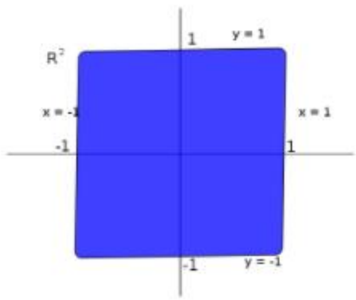
- The metric induced by $\|\cdot\|_1$ in that case, the unit ball is: $|x|+|y|<1$



- The metric induced by $\|\cdot\|_2$ in that case, the unit ball is: $\sqrt{x^2+y^2}<1$



- The metric induced by $\|\cdot\|_\infty$ in that case, the unit ball is: $\max\{|x|,|y|\}<1$



הגדרה: $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ (בין מרחבים – מטריים). אומרים ש – f

שיכון איזומטרי אם **שומרת מרחקים**, כלומר $\forall x_1,x_2\in X: \rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d(x_1,x_2)$

איזומטריה אם $\begin{cases} f(X)=Y \\ f \text{ שומרת מרחקים} \end{cases}$

טענה: כל שיכון איזומטרי תמיד חח"ע.

הוכחה: אם $x_1\neq x_2$ נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$

אז לכן $0=\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d(x_1,x_2)\underbrace{>}_{m_1}0$

בסתירה!

■

שימו לב: אם $f:X\to Y$ שיכון איזומטרי אם ורק אם $f:X\to f(X)$ איזומטריה.

הערה: איזומטריה ב – $Metr$ בתפקיד של איזומורפיזמים. ז"א יש אותן תכונות מטריות.

- $[5,6]\simeq[1,2]\not\simeq[8,10]$
  הסבר: הזזה ל 4 יחידות בממשיים היא איזומטריה
  $T_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto 4+x$

משרה איזומטריה $[1,2]\to[5,6]$

ב $[8,10]$ קיימות נקודות x,y כך ש $d(x,y)=2$ אבל לא ב $[1,2]$.

(הסבר אחר: המרחבים עם קוטר שונה. אבל **קוטר נשמר ע"י איזומטריה**)

- שיכון איזומטרי ליניארי $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ לכל $m\le n$ (להשלים)
- כל הזזה $T_a(v)=a+v$ $T_a:E\to E$ במרחב נורמי $a\in E$ היא איזומטריה.
  הסבר: $\|(a+v_1)-(a+v_2)\|=\|v_1-v_2\|$

- כל הזזה $T_a(x)=a+x$ $T_a:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ במרחב $(\mathbb{Z},d_p)$ היא איזומטריה.
  (להשלים)
- $(\mathbb{Z},d_5)$ לא איזומטרי עם $(\mathbb{Z},d_3)$.
  הסבר: ב $(\mathbb{Z},d_5)$ קיימות נקודות x,y כך ש $d_5(x,y)=\frac{1}{5}$ אבל לא ב $(\mathbb{Z},d_3)$.
- קיים שיכון איזומטרי $\mathbb{R}^n\to l_2$.
  (להשלים) דומה למקרה של $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ לכל $m\le n$.
- קיים שיכון איזומטרי $(\mathbb{N},d_\Delta)\to l_2$.
  הסבר מהיר: $n\mapsto\frac{e_n}{\sqrt{2}}$, $(\mathbb{N},d_\Delta)\to\{\frac{e_n}{\sqrt{2}}:n\in\mathbb{N}\}$ איזומטריה.

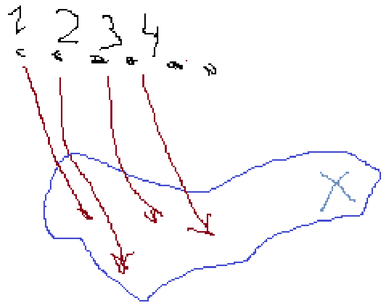
הערה: *מרחב הילברט סדרתי* $l_2=\{x=(x_1,x_2,\cdots):\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty\}$

$\|x\|:=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2}$ $<x,y>:=\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i$ מכפלה סקלרית (פנימית)

התכנסות סדרות

הגדרה (תזכורת): **סדרה** x_n בקבוצה X היא פונקציה $f:\{1,2,\cdots\}=\mathbb{N}\to X,\ n\mapsto f(n)=x_n$.

תת סדרה x_{n_k} היא צמצום הפונקציה על תת קבוצה אינסופית $n_1<n_2<n_3\cdots$



הגדרה: אומרים שסדרה x_n **מתכנסת** ל $a\in X$ במרחב (X,d)

ונסמן $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ (או $x_n\xrightarrow{d}a$) אם מתקיים:

הגדרה 1: $\lim_{n\to\infty} d(a,x_n)=0$

הגדרה 2: כל ε-סביבה $B(a,\varepsilon)$ של a מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה x_n

הגדרה 3: $\forall\varepsilon>0\quad \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\quad n\ge n_\varepsilon\Rightarrow d(a,x_n)<\varepsilon$

דוגמה: ב $(\mathbb{Z},d_3)$ $\lim_{n\to\infty}3^n=0$

הסבר: כי $d_3(3^n,0)=\frac{1}{3^n}\to 0$.

הערה:

- סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת (ברור מה הגבול !) בכל מרחב (X,d).
- תת סדרה של סדרה מתכנסת גם מתכנסת (ברור מה הגבול !)
- נניח $\rho\le d$. אז $x_n\xrightarrow{d}a \Rightarrow x_n\xrightarrow{\rho}a$.

  הסבר: $0\le\rho(a,x_n)\le d(a,x_n)\to 0$ בעזרת תכונת סנדוויץ $\rho(a,x_n)\to 0$.
- התכנסות ב $\mathbb{R}^n$ היא התכנסות רכיב-רכיב.

  הסבר: התכנסות גוררת "התכנסות רכיב-רכיב" כי

  $0\le\|v^{(m)}-u\|_k\le\|v^{(m)}-u\|\xrightarrow{m\to\infty}0$ ($\|x\|_k$ נורמה לפי קואורדינטה ה k)

גם ההפך נכון. תשתמשו בזה ש $\sum_{k=1}^{n} \|v\|_k =$ "נורמה של הסכום".

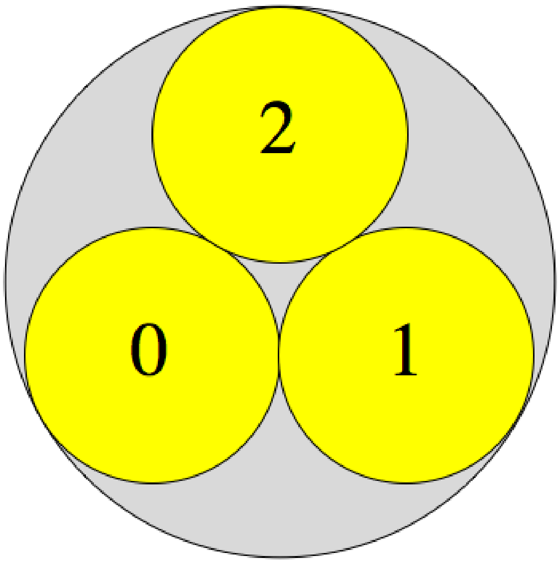
תרגיל: תנו דוגמה של סדרה לא מתכנסת ב l_2 שמתכנסת רכיב-רכיב.

הסבר: הסדרה הבאה מתכנסת רכיב רכיב ל ווקטור האפס

$$e_1 = (1,0,0,0\cdots)$$
$$e_2 = (0,1,0,0\cdots)$$
$$e_3 = (0,0,1,0\cdots)$$
$$\cdots$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנס כי $\forall i \neq j \quad d(e_i,e_j)=1$ **(המשיכו ...)**

<u>**תרגיל:**</u>* לפי האיור הבא תרכיבו ניסוח לתרגיל אפשרי לגבי מ"מ $(\mathbb{Z}, d_3)$



<u>**הגדרה:**</u> נק' $a \in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) אם $\exists \epsilon > 0: \quad B(a,\epsilon) = \{a\}$

<u>דוגמאות:</u> א. אין נקודה מבודדת ב $\mathbb{R}$ או ב $\mathbb{Q}$ ...

ב. נקודה 3 מבודדת בתת מרחב $X = [0,1] \cup \{3\}$ של $\mathbb{R}$.

<u>הגדרה:</u> מ"מ (X,d) נקרא <u>**דיסקרטי**</u> אם כל נקודה ב X מבודדת.

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, כל מרחב X עם מטריקת 0-1 הם דיסקרטיים.
- (Hamming distance)

בקבוצה $F(\mathbb{N})=\{(x_1,x_2,\cdots): \quad x_i\in\{0,1\} \ \exists\, k\in\mathbb{N}\ x_i=0 \ \ \forall\, i>k\}$

$$d_H(x,y)=\sum_i |x_i-y_i|$$

$(F(\mathbb{N}),d_H)$ מרחב מטרי כך שהטופולוגיה שלו היא דיסקרטית.

המשמעות של $d_H(x,y)$ היא מספר ההבדלים בין המילים x,y.

מ"מ $(F(\mathbb{N}),d_H)$ משוכן לתוך מרחב נורמי $l_1=\{x=(x_1,x_2,\cdots):\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty\}$.

<u>משפט:</u> a נקודה מבודדת במרחב **מטרי** (X,d) אם ורק אם

$\lim x_n=a$ גורר שהסדרה x_n היא בהכרח קבועה לבסוף $x_1,\cdots,x_m,a,a,\cdots$.

<u>הוכחה:</u> אם a מבודדת אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש $B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$.

(כיוון ראשון) נניח ש $\lim x_n=a$.

עבור ε הנ"ל קיים $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ כך ש $x_n\in B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$. אז הסדרה היא לבסוף a.

(כיוון שני) נניח כעת שנקודה a לא מבודדת.

<u>נוכיח יותר</u>: **שקיימת סדרה עם <u>איברים שונים</u> שמתכנסת ל a.**

נבחר $x_1\neq a$ (אם לא קיים אז המרחב הוא נקודון $X=\{a\}$ והנקודה מבודדת).

נבחר $0<\varepsilon_1<\min\{d(a,x_1),1\}$

נעיר ש $0<d(a,x_1)$ כי (X,d) מרחב מטרי ומתקיימת m_1.

בגלל ש a לא מבודדת קיים $x_2\in B(a,\varepsilon_1), x_2\neq a$.

נעיר ש $x_2\neq x_1$ כי $d(a,x_2)<d(a,x_1)$. וגם $d(a,x_2)<1$.

נמשיך בצורה רקורסיבית את הבנייה.

אם כבר הגדרנו $x_1,\cdots,x_n$ (שונים) $d(a,x_n)<d(a,x_{n-1})<\cdots<d(a,x_1)$

ולא שווים ל a עם התנאי $d(a,x_k)<\frac{1}{k-1} \ \ \forall\, 1<k\leq n$

אז נבחר ε_n שמקיים $0<\varepsilon_n<\min\{d(a,x_n),\frac{1}{n}\}$

ונבחר x_{n+1} כך ש $x_{n+1}\neq a$, $d(a,x_{n+1})<\varepsilon_n$ (שוב שימו לב ש a לא מבודדת)

אז $d(a,x_1)>\cdots>d(a,x_{n-1})>d(a,x_n)>d(a,x_{n+1})$.

כך נקבל סדרה עם איברים שונים ו $\lim x_n=a$ כי לכל $n>1$ $\quad 0\leftarrow d(a,x_n)<\frac{1}{n-1}$.

☺

תרגיל: הוכיחו שלא קיימת נקודה מבודדת ב $(\mathbb{Z},d_p)$.

הסבר: $\forall a\in\mathbb{Z}\quad a+p^n\xrightarrow{d_p}a$ סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a .