בוחן אלגברה לינארית למהנדסים תשעט סמסטר א'

מתרגלים: אחיה בר־און, עוזי חרוש, הראל רוזנפלד, יעל רוזנשטרק.

- ענו על כל השאלות. **יש לנמק כל תשובה!!**
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא. (על מחברת בחינה ממדור בחינות מספיק למלא רק בעמוד הראשון.)**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

Q1	
Q2	
total	

בהצלחה!

1. נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&-2&-2&1\\2&-1&-1&2\\1&-2&-2&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$$

ונגדיר

$$W_1=\left\{x\in\mathbb{R}^4:\ Ax=0\right\},W_2=C(A)$$

(כלומר W_2 הוא מרחב העמודות של A).

(א) מצאו מטריצה B כך ש $W_2=\left\{x\in\mathbb{R}^4:\ Bx=0\right\}$.

פתרון:

רואים כי עמודה 1 שווה לעמודה 4 וכן עמודה 2 שווה לעמודה 3. בנוסף רואים כי עמודה 1 ועמודה 2 בת"ל

$$W_2=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

כעת $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in W_2$ אמ"מ יש פתרון למערכת $\left(\begin{array}{cc|c}1&0&a\\1&-2&b\\2&-1&c\\1&-2&d\end{array}\right)$. נדרג

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&a\\1&-2&b\\2&-1&c\\1&-2&d\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&a\\0&-2&b-a\\0&-1&c-2a\\0&-2&d-a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\0&1&2a-c\\0&-2&b-a\\0&-2&d-a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\0&1&2a-c\\0&-2&b-2c+3a\\0&-2&d-2c+3a\end{array}\right)$$

לכן

$$\begin{aligned}W_2&=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}:\ (b-2c+3a=0)\wedge(d-2c+3a)\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}3&1&-2&0\\3&0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

אם נגדיר $B=\begin{pmatrix}3&1&-2&0\\3&0&-2&1\end{pmatrix}$ נקבל את המבוקש.

(ב) מצאו בסיס ל $W_1\cap W_2$.

פתרון:

מתקיים כי

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן נדרג את $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}^4 \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \right\}$$

2. תהא $A \in \mathbb{R}^{4\times 6}$. מתרגל החליט לדרג את המטריצה A. במהלך דירוגו הוא הגיע למטריצה

$$.B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מה מהבאים **בהכרח** נכון (עבור סעיפים נכונים ־ הוכיחו. עבור סעיפים שאינם נכונים ־ הפריכו):

(א) $.rank(A) = 3$

פתרון:

נכון. מרחב השורות לא מתקלקל בדירוג ולכן $.rank(A) = \dim R(A) = \dim R(B)$ כיוון ש B מדורגת, מימד $R(B)$ שווה למספר השורות שונות מאפס ששווה ל 3.

(ב) $C_3(A), C_4(A), C_5(A)$ בת"ל

(כאשר $C_3(A)/C_4(A)/C_5(A)$ היא עמודה השלישית/הרביעית/החמישית של A (בהתאמה)) .

פתרון:

נכון. נסמן ב E את המטריצה המדרגת את A ל B, כלומר $EA = B$. לפי כפל עמודה, נקבל כי $C_i(B) = C_i(EA) = E \cdot C_i(A)$ עבור $i \in \{3,4,5\}$. כעת יהא $\alpha_1 C_3(A) + \alpha_2 C_4(A) + \alpha_3 C_5(A) = 0$ צירוף לינארי שמתאפס ונראה שהוא הצירוף הלינארי הטריוי'. כיוון ש E הפיכה נקבל $C_i(A) = E^{-1} C_i(B)$ עבור $i \in \{3,4,5\}$ ולכן

$$\alpha_1 E^{-1} C_3(B) + \alpha_2 E^{-1} C_4(B) + \alpha_3 E^{-1} C_5(B) = 0$$

נכפיל את השיוון ב E משמאל ונקבל

$$\alpha_1 C_3(B) + \alpha_2 C_4(B) + \alpha_3 C_5(B) = 0$$

נראה כי $C_3(B), C_4(B), C_5(B)$ בת"ל וזה יגרור כי $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ כנדרש.
אכן נדרג את המטריצה שעמודותיה הן $C_3(B), C_4(B), C_5(B)$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כיוון שיש 3 איברים מובילים בצורה מדורגת נקבל שאכן $C_3(B), C_4(B), C_5(B)$ בת"ל.

(ג) $R_1(A), R_2(A), R_3(A), \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ת"ל

(כאשר $R_1(A)/R_2(A)/R_3(A)$ היא השורה הראשונה/השניה/השלישית של A (בהתאמה)).
פתרון:

מרחב השורות לא מתקלקל ולכן $R(A) = R(B)$. לכן $R_1(A), R_2(A), R_3(A), R_1(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in$ $R(A)$ וקיבלנו 4 וקטורים במרחב מימד 3 ולכן הם ת"ל.

(ד) המטריצה AA^t אינה הפיכה (כאשר A^t היא המטריצה המשוחלפת של A).
פתרון:
המטריצה $AA^t \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ומתקיים כי $rank(AA^t) \le rank(A) = 3$ ולכן המטריצה אינה הפיכה.

(ה) למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ אין פתרון.
פתרון:
לא נכון. למשל עבור $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ מתקיים כי B היא צורה מדורגת שלה (ע"י

החלפת השורות 3 ו 4) ומתקיים כי יש פתרון למערכת $Ax = b$, כאשר $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, כיוון שאחרי דירוג של המטריצה $(A|b)$ מקבלים

$$(A|b) \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שאין בה שורת סתירה.

(ו) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in C_6(A)$, ת"ל (כאשר $C_6(A)$ היא העמודה השישית של A).

פתרון:

נכון. נסמן ב E את המטריצה המדרגת את A ל B, כלומר $EA = B$. לפי כפל עמודה, נקבל כי $C_6(B) = C_6(EA) = E \cdot C_6(A)$ נכפיל את השיוון ב E^{-1} משמאל ונקבל

$$C_6(A) = E^{-1}C_6(B) = E^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_6(A)$ ת"ל כי למשל $1 \cdot C_6(A) + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי לא טריוויאלי שמתאפס.