תרגיל מס 2 - אינפי 4 תשע`ט

26 במרץ 2019

הנחיות: בחישוב של אינגרלים, עם העקומה היא פשוטה, ניתן להניח שהאינטגרל להניח שאם לשתי פרמטריזציות יש את אותה האוריינטציה, אזי האינטגרלים שווים. כלמר, האינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה, אלא באוריינטציה בלבד. כל עוד מדובר בפרמרמיזציות פשוטות או עם מספר סופי של נק' בהן הפרמטריזציה אינה חח"ע.

1. עבור כל אחד התחומים הבאים, קבעו אם הוא כוכבי או קמור (ייתכן שאף אחת מהאפשרויות אינה מתקיימת)
   (א) כדור היחידה בנורמה כלשהי.
   (ב) $\{(x,0)\,|x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y)\,|x\in\mathbb{R}\}$. (אוסף כל הנקודות שנמצאות באחד מן הצירים.
   (ג) $\left\{\left(x^2+y^2\right)^2\le x^2-y^2\right\}$.
   (ד) $\left\{(x,y)\,|-1\le x\le 1,-x^2-1\le y\le x^2+1\right\}$

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.
   (א) אם A קמורה, אזי הפנים של A גם קמורה.
   (ב) אם A,B קמורות, אזי $A\cap B$ גם קמורה.
   (ג) אם A ו B קבוצות כוכביות, $A\cap B$ כוכבית.
   (ד) אם A כוכבית, אזי הפנים של A גם קבוצה כוכבית.
   (ה) אם A כוכבית, אזי הסגור של A, $\overline{A}$ גם כוכבית.
   (ו) אם A כוכבית, אזי המשלים של A גם כוכבי.
   (ז) אם $A\neq\mathbb{R}^n$ כוכבית, אזי A^c (המשלים של A) אינו חסום.

3. עבור $D\in\mathbb{R}^n$, נאמר ש D היא תחום פשוט קשר אם לכל מסילה סגורה $\gamma:[a,b]\to D$ קיימת פונקציה רציפה $\tilde{\gamma}:[a,b]\times[0,1]\to D$ כך ש $\tilde{\gamma}(x,0)=\gamma(x)$ ו $\tilde{\gamma}(x,1)=c$ (כלמר $\tilde{\gamma}(x,1)$ היא פונקציה קבועה).
   (א) הראו שכל תחום כוכבי הוא פשוט קשר.
   (ב) תנו דוגמה לתחום פשוט קשר שאינו כוכבי.

4. הראו שם α ו β הן מסילות אטישקולות, $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ שדה, אזי האינגרל $\int_\alpha F$ קיים אם ורק אם $\int_\beta F$ קיים ומתקיים $\int_\alpha F=-\int_\beta F$.

5. עבור כל אחת מהתבניות הבאות, קבעו אם היא סגורה או מדוייקת. נמקו. במידה והיא מדויקת, מצאו את פונקציית הפוטנציאל שלה.

(א) $\omega\left(x,y\right)=e^{x-y}\left(1+x+y\right)\mathbf{d}x+e^{x-y}\left(1-x-y\right)\mathbf{d}y$ בכל $\mathbb{R}^2$.

(ב) $\omega\left(x,y\right)=\frac{y^2}{1+x^2+y^2}\mathbf{d}x+\frac{y}{1+x^2+y^2}$ בכל $\mathbb{R}^2$.

(ג) $\omega\left(x,y\right)=-\frac{y^2}{(x-y)}\mathbf{d}x+\frac{x^2}{(x-y)}\mathbf{d}x$ עבור $x>y$.

(ד) $\omega\left(x,y\right)=\frac{2y}{(x+y)}\mathbf{d}x-\frac{2x}{(x+y)}\mathbf{d}y$ עבור $x+y>0$.

(ה) $\omega\left(x,y,z\right)=\left(y^2+2xz^2\right)\mathbf{d}x+\left(2xy+2y^2z^3\right)\mathbf{d}x+\left(2x^2z+3y^3z^2\right)\mathbf{d}z$.

6. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_\Gamma\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{d}x+\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{d}y$ כאשר Γ היא השפה של הריבוע $ABCD$, $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $C=(-1,0)$, $D=(-1,0)$ נגד כיוון השעון.

(ב) $\int_\Gamma\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{d}y$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y):(x-2)^2+(y-3)^2=1\right\}$ נגד כיוון השעון.

(ג) $\int_\Gamma y^3z^2\mathbf{d}x+\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathbf{d}y+z\mathbf{d}z$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y,z):y^2+z^2=4,x=0,z<0\right\}$ אם מסתכלים מהכיוון החיובי של ציר ה x.

(ד) $\int_\Gamma x^2\mathbf{d}x+y^2\mathbf{d}y$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$ נגד כיוון השעון.

7. הוכיחו שאם $\|F\left(x\right)\|\le M$ עבור שדה F, γ מסילה אזי מתקיים

$$\left|\int_\Gamma f\cdot\mathbf{d}\gamma\right|\le ML\left(\gamma\right).$$